Vetores e Álgebra Linear

Exercícios de reforço para a segunda prova

2º sem 2014 Prof. Fabbri

ATENÇÃO: NÃO SERÁ PERMITIDO O USO DE CALCULADORA. *DURANTE A PROVA, O ALUNO DEVE PORTAR APENAS O MATERIAL NECESSÁRIO: LAPISEIRA, CANETA, BORRACHA E RÉGUA.*

QUESTÃO 1: (a) Determine o valor de α para que o sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \\ y+\alpha z=0 \end{cases}$ admita uma solução não trivial.

(b) Nesse caso, obtenha uma solução com módulo 1 e tal que x + y + z > 0.

Resp.: $\alpha = -1/2$; $\dfrac{(-1,1,2)}{\sqrt{6}}$

Reforço: Repita o exercício para o sistema $\begin{cases} x-y+z=0 \\ y+z=0 \\ y+\alpha z=0 \end{cases}$. *Resp.:* $\alpha = 1$; $\dfrac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}}$

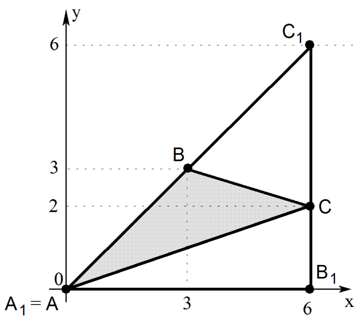
QUESTÃO 2: Resolva o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ \alpha x-y+2z=2 \\ -x+2y-3z=1 \end{cases}$ pela regra de Cramer, obtendo x, y e z em função de α. Para quais valores de α teremos $x.y.z = 0$?

Resp.: $\dfrac{(10,\,2(5\alpha-6),\,5(\alpha-2))}{5\alpha-4}$; $\alpha = 1{,}2$ *ou* $\alpha = 2$

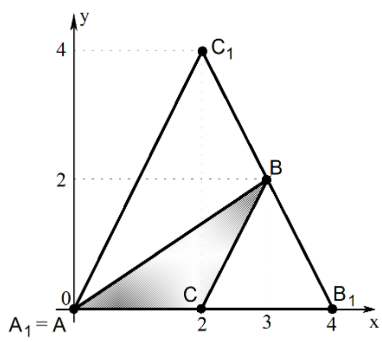
Reforço: Repita o exercício com o sistema $\begin{cases} x-3y+4z=2 \\ \alpha y-2z=1 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$.

Resp.: $\dfrac{[2(2\alpha+7),\,-14,\,-(4\alpha+7)]}{2(7-3\alpha)}$; $\alpha = -3{,}5$ *ou* $\alpha = -1{,}75$

QUESTÃO 3: Escreva uma transformação linear **T** que mapeie o triângulo ABC no triângulo $A_1B_1C_1$. Qual o valor de det(**T**)?



Resp.: $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; -4



Reforço: Repita o exercício com os triângulos ao lado.

Resp.: $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; -3

<u>QUESTÃO 4</u>: Uma transformação linear $\mathbf{T}$ no $\mathbb{R}^2$ é tal que $\mathbf{T}(\vec{a}) = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, e $\mathbf{T}(\vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$. Encontre os autovalores de $\mathbf{T}$, supondo que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes.

Resp.: $\dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Reforço: Repita o exercício supondo $\mathbf{T}(\vec{a}) = -3\vec{a} + \vec{b}$ e $\mathbf{T}(\vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{b}$. *Resp.:* $\dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$

<u>QUESTÃO 5</u>: Dadas as matrizes triangulares $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, desejamos encontrar o vetor $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tal que $\mathbf{LUX} = \mathbf{B}$, onde $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix}$. Uma maneira prática de fazer isso é, numa primeira etapa, encontrar o vetor $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tal que $\mathbf{LY} = \mathbf{B}$, e então resolver $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$.

Determine os vetores $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}$ seguindo o método acima, e a soma $S = \sum_{i=1}^{3} x_i y_{4-i}$.

Resp: $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $S = 4$

Reforço: Repita o exercício para $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Resp: $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix}$ $S = -78$

<u>QUESTÃO 6</u>: Uma matriz $\mathbf{A}$, 3×3, é submetida às seguintes operações, em sequência:

(1) troca-se as linhas 1 e 3 de posição
(2) a linha 2 é substituída por ela mesma multiplicada por -1 e somada com a linha 1;
(3) troca-se as linhas 2 e 3 de posição.

O resultado é a matriz $\mathbf{B}$.

Escreva a matriz $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{EA}$. Resp.: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Reforço: Uma matriz $\mathbf{A}$, 4×3, é submetida às seguintes operações, em sequência:

(1) a linha 3 é substituída por ela mesma multiplicada por -2 e somada com a linha 1 multiplicada por 3;
(2) troca-se as linhas 1 e 2 de posição
(3) a linha 4 é substituída por ela mesma multiplicada por -1 e somada com a linha 1;
(4) troca-se as linhas 4 e 3 de posição.

O resultado é a matriz $\mathbf{B}$.

Escreva a matriz $\mathbf{E}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{EA}$.

Resp.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

<u>QUESTÃO 7</u>: QUESTÃO DO PROGRAMA DE LEITURA.