

CÁLCULO AVANÇADO

2º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri

© 2004-14

1ª Série de Exercícios

Séries numéricas

Exercício 1. Verifique se cada série abaixo converge ou não. Dê a sua justificativa.

(a) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1,2)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{(1,2)^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

(h) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{i}}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(d) $1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + \dots$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{1+n^2}}$

Exercício 2. Calcule a soma das séries abaixo:

(a) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1,2)^n}$

(b) $1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + \dots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(f) $5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1,2)^n}$

Exercício 3. Calcule a soma das séries alternadas abaixo com precisão de $\pm 0,01$:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

Exercício 4. Calcule a soma das séries abaixo com precisão de $\pm 0,01$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{5,7}}$

1ª Série de Exercícios - RESPOSTAS

Séries numéricas

Exercício 1.

(a) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$

Converge, pois é uma série geométrica de razão $-2/3$.
(toda série geométrica de razão q tal que $|q| < 1$ converge)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$

Diverge, pois o termo geral não tende a zero $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \frac{1}{5} \right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$

Diverge, pois é uma série geométrica com razão $4/3$.
(toda série geométrica de razão q tal que $|q| \geq 1$ diverge)

O termo geral não tende a zero $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1} = \infty \right)$

(d) $1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + \dots$

Converge, pois é uma série geométrica de razão $0,4$
(toda série geométrica de razão q tal que $|q| < 1$ converge)

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$

Diverge, pois é 3 vezes a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que sabidamente diverge.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

Diverge, pois o termo geral não tende a zero $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1 \right)$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Converge, pois é uma série alternada e o termo geral tende a zero $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0 \right)$

$$(h) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{i}}$$

Diverge, pois é uma série-p (função Zeta de Riemman, série harmônica generalizada) com $p=1/3$.

A série-p sabidamente diverge quando $p \leq 1$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$$

Converge, pois é uma série alternada e o termo geral tende a zero $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = 0 \right)$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{1+n^2}}$$

Diverge, pois o termo geral não tende a zero $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1 \right)$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1,2)^n}$$

Converge, pois é uma série geométrica de razão $1/(1,2)$.
(toda série geométrica de razão q tal que $|q| < 1$ converge)

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{(1,2)^n}$$

Converge, pois é uma série geométrica de razão $-1/(1,2)$.
(toda série geométrica de razão q tal que $|q| < 1$ converge)
Além disso, é uma série alternada com o termo geral tendendo a zero.

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Aqui é necessário apelar para o teste da razão.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.2.3 \dots n}{1.2.3 \dots n.(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Como esse limite é menor do que 1, a série converge.

$$(n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

Converge, pois é uma série alternada e o termo geral tende a zero $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0 \right)$

Além disso, vimos no item anterior que essa série é absolutamente convergente.

Exercício 2.

(a) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$ é uma série geométrica de razão $-2/3$

$$\text{A soma da série é } S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-(-2/3)} = \frac{5}{5/3} = 3$$

(b) $1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + \dots$

É uma série geométrica de razão $0,4$

$$\text{A soma da série é } S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-0,4} = \frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

Faça a expansão em frações parciais:
$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right] = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Faça a expansão em frações parciais:
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(1,2)^n}$$

É uma série geométrica de razão $1/1,2 \Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5/1,2}{1-1/1,2} = \frac{5}{1,2-1} = \frac{5}{0,2} = 25$

(f)
$$S = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1,2)^n}$$

A soma é uma PG de razão $-1/1,2 \Rightarrow S = 5 \frac{a_1}{1-q} = 5 \frac{-1/1,2}{1-(-1/1,2)} = \frac{-5}{1,2+1} = \frac{-5}{2,2} = -2,2727\dots$

Exercício 3.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

A série é $S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$, que é alternada.

Expressando esses números na forma decimal, teremos:

$$S = 1 - 0,25 + 0,111\dots - 0,0625 + 0,04 - 0,0277\dots + 0,0204\dots - 0,0156\dots + 0,0123\dots - 0,01 + \dots$$

Sabemos que o erro de truncamento é menor que o primeiro termo desconsiderado.

Para que o erro de truncamento seja $\leq 0,01$, somamos os nove primeiros termos acima, isto é,

$$S = 0,82796\dots - 0,01 + \dots$$

Note que as contas devem ser feitas utilizando a resolução total da calculadora: não é necessário, e nem se deve, arredondar manualmente os números intermediários. Utilize, se necessário, a memória de sua calculadora.

O resultado final deve ser escrito levando em conta um número de casa decimais compatível com o erro estimado (no caso acima, duas casas), e efetuando os arredondamentos finais de forma correta.

Resposta final: $S = 0,83 \pm 0,01$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$$

$$\text{Teremos } S = -0,5 + 0,0833\dots - 0,0277\dots + 0,0125 - 0,00666\dots + \dots$$

Aqui, basta somar os quatro primeiros termos, porque o quinto termo já é menor do que 0,01.

$$S = -0,43194\dots - 0,00666\dots + \dots$$

Resposta final: $S = -0,4319 \pm 0,0067$

- NOTE:**
1. O número de casas decimais deve ser o mesmo no resultado e no erro (desvio)
 2. O arredondamento correto no resultado
 3. O erro (desvio) deve ser sempre arredondado para cima
 4. O erro (desvio) deve ser expresso com, no máximo, dois algarismos significativos.

Também poderíamos responder, corretamente, que $S = -0,432 \pm 0,007$
ou ainda, que $S = -0,43 \pm 0,01$

Naturalmente, a resposta com o menor desvio possível é a melhor.

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

Bastam os quatro primeiros termos.

Resposta final: $S = 0,6250 \pm 0,0084$

Exercício 4.

(a) Devemos ter

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{x^3} dx \leq 0,01 \Rightarrow \left. \frac{1}{2x^2} \right|_{\infty}^N \leq 0,01 \Rightarrow \frac{1}{2N^2} \leq 0,01 \Rightarrow 2N^2 \geq 100 \Rightarrow N \geq 7,07$$

Somando até o oitavo termo, encontramos 1,195.

$$(b) \int_N^{\infty} e^{-x} dx \leq 0,01 \Rightarrow e^{-x} \Big|_{\infty}^N \leq 0,01 \Rightarrow e^{-N} \leq 0,01 \Rightarrow N \geq 4,6$$

Somando até o quinto termo, encontramos 1,578 .

$$(c) \int_N^{\infty} \frac{4}{x^{5,7}} dx \leq 0,01 \Rightarrow \left. \frac{4}{4,7x^{4,7}} \right|_{\infty}^N \leq 0,01 \Rightarrow \frac{4}{4,7N^{4,7}} \leq 0,01 \Rightarrow N^{4,7} \geq \frac{4}{0,047} \Rightarrow N \geq 2,57$$

Somando até o terceiro termo, encontramos 4,085 .

© 2004-14 Maurício Fabbri
MCT/INPE: <http://www.las.inpe.br/~fabbri>
Universidade São Francisco – USF
Itatiba/Campinas – <http://www.saofrancisco.edu.br>
São Paulo - Brazil
Permitido uso livre para fins educacionais,
sem ônus, desde que seja citada a fonte.