CÁLCULO AVANÇADO

2º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri

2ª Série de Exercícios

Transformadas de Laplace

PRELIMINARES

A representação matemática de um problema prático em geral envolve alguns tipos conhecidos de funções. *"Resolver o problema"* significa, matematicamente, encontrar essas funções a partir das leis físicas que regem o comportamento do sistema em questão. Por exemplo, o comportamento da corrente em um circuito elétrico obedece à conservação de cargas e às leis do eletromagnetismo; o movimento de um rotor mecânico segue as leis de Newton do movimento, e assim por diante. Ocorre que, em grande número de casos, as leis físicas envolvem as derivadas das grandezas de interesse, e para resolver o problema é preciso encontrar a solução de *equações diferenciais*, o que não é uma tarefa fácil, e pode ficar bastante enfadonha. Trabalhar com equações diferenciais também não é, na maioria das situações práticas, a forma mais adequada de projetar filtros, sistemas de controle, ou analisar vibrações mecânicas e fazer estudos de estabilidade.

A técnica da transformada de Laplace consiste em trabalhar com uma outra representação das funções envolvidas. Considere uma função f(t), tal como usada para descrever um fenômeno prático (por exemplo, o valor de uma corrente elétrica ao longo do tempo). A transformada de Laplace de f(t), que chamaremos de F(s), é uma outra representação da mesma corrente elétrica, mas não como função do tempo. Ela é obtida, formalmente, pela definição abaixo:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Isso parece um tanto complicado, ainda mais que, para ter utilidade, a nova variável s deve ser na verdade uma variável complexa, com uma parte real e uma parte imaginária:

$$s = \sigma + j\omega \qquad\qquad (j^2 = -1)$$

Tecnicamente, dizemos que f(t) é a representação da função no *domínio do tempo*, enquanto que F(s) é a representação dessa mesma função no *domínio da freqüência*. A variável s é interpretada como sendo uma "freqüência complexa": a parte real (σ), como veremos, corresponde a amortecimentos exponenciais, e a parte imaginária (ω) a oscilações.

Na prática, dificilmente se utiliza a definição acima para encontrar F(s). Veremos abaixo que a transformada de Laplace tem algumas propriedades, fáceis de usar, que simplificam essa tarefa. E o fato da variável s ser um número complexo permite que tratemos vários tipos de solução de maneira unificada. Ainda mais, o projeto de sistemas no domínio da freqüência é, em grande número de casos, bem mais simples que no domínio do tempo.

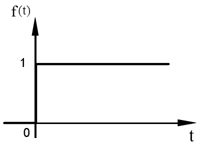
A principal razão da utilidade da transformada de Laplace é que algumas *equações diferenciais* básicas *no domínio do tempo* correspondem a *equações algébricas no domínio da freqüência.*

Matematicamente, é possível provar que a transformada de Laplace F(s) é biunívoca, isto é, cada F(s) corresponde a uma única f(t) para $t > 0$, e vice-versa. Formalmente, escrevemos $F = \mathcal{L}\{f\}$ para a transformada, e $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ para a transformada inversa. Há algumas condições que f(t) deve satisfazer para que exista F(s), mas essas condições são satisfeitas para todos os sinais de interesse prático comum.

AS FUNÇÕES BÁSICAS

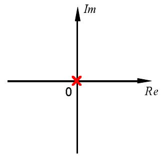
Do ponto de vista da Engenharia no dia-a-dia, há apenas alguns tipos de funções (ou “sinais”) em termos dos quais podemos descrever o comportamento dos sistemas em estudo. Segue abaixo cada um desses sinais e suas representações no domínio do tempo e no domínio da freqüência.

1. A função degrau unitário $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$



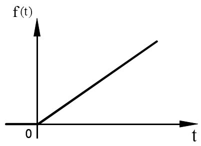
Essa função simula o fechamento de uma chave no instante t = 0, ou uma mudança súbita de nível em t = 0. No domínio do tempo, o gráfico lembra um degrau.

A transformada de Laplace do degrau unitário é $F(s) = \dfrac{1}{s}$.



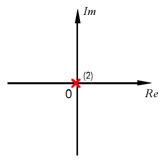
Note que o valor s = 0 anula o denominador de F(s). Dizemos que F(s) tem um pólo em s = 0, e marcamos esse pólo no plano complexo usando o sinal × .

2. A varredura linear (“rampa”) $f(t) = \begin{cases} t & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$



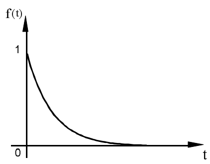
Corresponde a um sinal de “varredura”, isto é, um sinal mecânico ou elétrico que indica uma mudança (aumento) linear de valor com o tempo.

A transformada de Laplace da rampa é $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$.



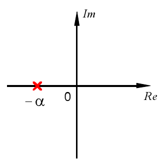
Agora o valor s = 0 é uma *raiz dupla* do denominador de F(s). Dizemos que F(s) tem um pólo duplo em s = 0, e marcamos esse pólo no plano complexo usando o sinal $\times^{(2)}$.

3. O decaimento exponencial $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$



Temos um sinal que decai exponencialmente, com constante de tempo $\tau = 1/\alpha$. É o que ocorre, por exemplo, quando um copo de água quente esfria em contato com o ambiente, ou durante a descarga de um capacitor em um circuito passivo, ou ainda durante o retorno de um amortecedor mecânico elástico.

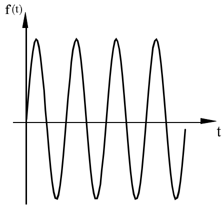
A transformada de Laplace do sinal exponencial é $F(s) = \dfrac{1}{s+\alpha}$.



A raiz do denominador é $s = -\alpha$. F(s) tem um pólo simples $s = -\alpha$.

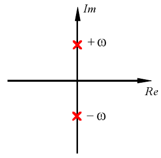
Usamos o sinal negativo porque as exponenciais que interessam são decrescentes ($\alpha > 0$). Um valor negativo de α indica um aumento exponencial, e essa é, na maioria dos casos, sinal de instabilidade. Em linguagem técnica, dizemos que *“uma condição para que o sistema seja estável é que tenha pólos apenas no semiplano esquerdo”*, ou seja, com parte real negativa. Note que, quanto mais distante estiver o pólo da origem, mais depressa o sistema chega ao estado final de equilíbrio.

4. A oscilação harmônica (senoidal) $f(t)=\begin{cases}\text{sen}(\omega t) & \text{para } t>0\\ 0 & \text{para } t<0\end{cases}$



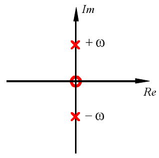
Descreve uma oscilação harmônica com freqüência angular ω. A freqüência em ciclos por segundo é f ($\omega = 2\pi f$). Por exemplo, poderia ser uma massa oscilando presa a uma mola, sem atrito, ou a corrente elétrica por um circuito LC ideal.

A transformada de Laplace é $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.



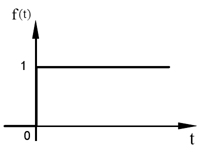
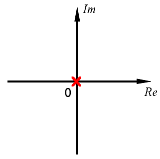
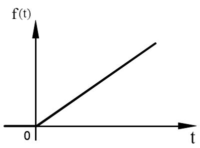
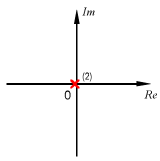
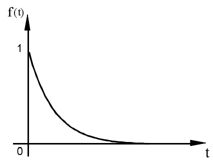
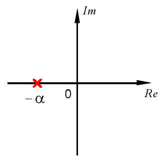
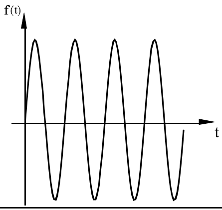
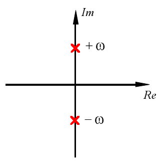
As raízes do denominador são complexas conjugadas, $s = \pm j\omega$. F(s) tem um par de pólos complexos conjugados, puramente imaginários. Quanto mais distantes estiverem esses pólos da origem, maior a freqüência de oscilação.

A função $f(t) = \cos(\omega t)$ descreve o mesmo tipo de comportamento (a diferença é apenas uma fase de 90º), e tem como transformada $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$. Temos agora, além dos pólos em $\pm j\omega$, um zero (valor que anula o numerador) em $s = 0$.



A tabela abaixo resume a descrição de cada tipo básico de função nos domínios do tempo e da freqüência. Observe que:

→ No domínio do tempo, analisamos o comportamento dos sistemas usando gráficos de funções *versus* tempo.
→ No domínio da freqüência, analisamos o comportamento dos sistemas verificando a posição dos pólos e zeros das transformadas de Laplace no plano complexo.

FUNÇÃO	**DOMÍNIO DO TEMPO**		**DOMÍNIO DA FREQÜÊNCIA**		**Fenômeno que descreve**
	equação	*representação gráfica*	*transformada de Laplace*	*diagrama de pólos e zeros*	
Degrau unitário	$f(t)=\begin{cases}t & \text{para } t>0\\ 0 & \text{para } t<0\end{cases}$		$F(s)=\dfrac{1}{s}$		Sinal constante aplicado em $t = 0$
Varredura linear	$f(t)=\begin{cases}t & \text{para } t>0\\ 0 & \text{para } t<0\end{cases}$		$F(s)=\dfrac{1}{s^2}$		Aumento linear
Decaimento exponencial	$f(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & \text{para } t>0\\ 0 & \text{para } t<0\end{cases}$		$F(s)=\dfrac{1}{s+\alpha}$		Relaxação constante de tempo = $1/\alpha$
Oscilação harmônica	$f(t)=\begin{cases}\text{sen}(\omega t) & \text{para } t>0\\ 0 & \text{para } t<0\end{cases}$		$F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$		Oscilação harmônica freqüência f ($f = \omega/2\pi$)

AS PROPRIEDADES

As transformadas de Laplace apresentam algumas propriedades que são a razão delas serem tão úteis e eficientes na análise e projeto de sistemas.

Essas propriedades são mais bem visualizadas imaginando o efeito que uma operação no domínio do tempo terá no domínio da freqüência, e vice-versa.

Veremos aqui apenas as propriedades mais básicas, apropriadas para um curso introdutório.

(I) Linearidade

$\mathcal{L}$ é um operador linear, isto é, $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\ \mathcal{L}\{f\} + \beta\mathcal{L}\{g\}$, se α e β forem constantes.

<u>Exemplo</u>: Se $f(t) = 3 + 5e^{-2t} - 4\mathrm{sen}(4\pi t)$, então $F(s) = \frac{3}{s} + \frac{5}{s+2} - \frac{16\pi}{s^2 + (4\pi)^2}$

Observações importantes:

1. Não some as frações acima, pois cada termo indica claramente de que sinal se trata. Se somarmos tudo e reduzirmos os termos semelhantes, ficaremos com $F(s) = \frac{8s^3 + 2(3+8\pi)s^2 + 16\pi(8\pi+1)s + 32\pi(3\pi+1)}{s^4 + 2s^3 + 16\pi^2 s^2 + 32\pi^2 s}$,
   ou, pior ainda, $F(s) = \frac{8s^3 + 56{,}265...s^2 + 1313{,}57...s + 1048{,}01...}{s^4 + 2s^3 + 157{,}91...s^2 + 315{,}82...s}$
2. Não substitua o valor de π na transformada: lembre-se de que a freqüência angular $\omega = 2\pi f$, e se $\omega = 4\pi$, então $f = 2$.
3. Na prática, grande parte do esforço é de deixar a transformada na forma fatorada, dividida em frações parciais; só assim é possível identificar e quantificar prontamente cada tipo de função que aparece em F(s).

(II) Multiplicação por exponencial: $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(s+\alpha)$

No domínio do tempo, a multiplicação por uma exponencial decrescente significa que o sinal será amortecido (vai morrer exponencialmente com o tempo).

No domínio da freqüência, isso corresponde a deslocar cada pólo e zero de $-\alpha$.

<u>Exemplo</u>: Se $f(t) = 10\,\mathrm{sen}(20\pi t)$, teremos $F(s) = \frac{200\pi}{s^2 + (20\pi)^2}$

Portanto, a transformada de $g(t) = 10e^{-2t}\mathrm{sen}(20\pi t)$ é $F(s) = \frac{200\pi}{(s+2)^2 + (20\pi)^2}$

Note que os pólos de G(s) são $-2 \pm j(20\pi)$. A parte real $\sigma = -2$ indica que o sinal é amortecido com constante de tempo ½ , e a parte imaginária $\omega = \pm 20\pi$ indica que é uma oscilação com freqüência 10.

(III) Derivadas no tempo

No domínio da freqüência, uma função e sua derivada se relacionam através de uma regra algébrica bastante simples:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Em problemas práticos, a função f(t) pode ser descontínua em t = 0, e o estado do sistema para t < 0 é conhecido. Por isso é mais conveniente usar

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_-)$$

Exemplo: Se $f(t) = 10\,\text{sen}(20\pi t)$, teremos $F(s) = \dfrac{200\pi}{s^2 + (20\pi)^2}$ e f(0) = 0.

Portanto, a transformada de $g(t) = \dfrac{df}{dt} = 200\pi\cos(20\pi t)$ é $F(s) = \dfrac{200\pi s}{s^2 + (20\pi)^2}$

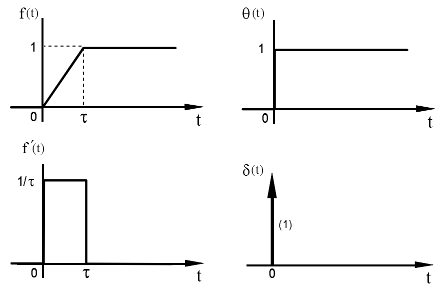
O TRATAMENTO DE DESCONTINUIDADES

(tópico avançado)

A função degrau unitário $\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$ pode ser tratada como sendo o limite da função $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \dfrac{1}{\tau} t & \text{para } 0 < t < \tau \\ 1 & \text{para } t > \tau \end{cases}$

quando $\tau \to 0$. f(t) sofre uma transição contínua de 0 para 1 durante o intervalo de tempo τ.

É possível tratar a derivada da função degrau também como o limite da derivada de f(t) quando $\tau \to 0$. A idéia está esquematizada ao lado.



A derivada de θ(t) é chamada de função impulso δ(t), e certamente não é uma função no sentido usual do termo (pertence a uma classe de funções chamada de *"funções generalizadas"*). A função impulso é definida formalmente pelas propriedades

$$\delta(t) = 0 \text{ para todo } t \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

A transformada de Laplace de δ(x) é 1, isto é, $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Uma função g(t) que tenha uma descontinuidade em t = 0 pode ser escrita como a soma de uma função contínua em t = 0 com um degrau, onde a altura do degrau é igual a $g(0_+) - g(0_-)$.

Por exemplo, considere a função $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{para } t > 0 \end{cases}$. Essa função pode ser escrita como g(t) = h(t) + θ(t), onde $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^{-\alpha t} - 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$. h(t) é uma função contínua. No domínio da freqüência, teremos $G(s) = H(s) + \dfrac{1}{s}$.

Para as derivadas, podemos escrever $g'(t) = h'(t) + \delta(t)$, que no domínio da freqüência fica $sG(s) = sH(s) + 1$.

Note que usamos a propriedade $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_-)$. Esse procedimento permite distinguir entre as funções

$$f_1(t) = e^{-\alpha t} \quad \text{para todo t} \qquad \text{(contínua em t = 0)}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{para } t > 0 \end{cases} \qquad \text{(descontínua em t = 0)}$$

As transformadas de f_1 e f_2 são iguais, uma vez que só interessam os valores para t > 0: $F_1(s) = F_2(s) = \dfrac{1}{s+\alpha}$, mas suas derivadas são diferentes no domínio da freqüência: $\mathcal{L}\{f_1'\} = sF_1(s) - 1 = \dfrac{-\alpha}{s+\alpha}$, ao passo que $\mathcal{L}\{f_2'\} = sF_1(s) = \dfrac{s}{s+\alpha}$.

OS TEOREMAS DOS VALORES INICIAL E FINAL

Relacionam os valores de f(0) e f(∞) com a transformada de Laplace:

$$f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Exemplo: Se $F(s) = \frac{s+10}{s(s+2)}$, o valor inicial de f é $f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s+10}{s+2} = 1$, e o valor e regime de f é $f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+10}{s+2} = 5$.

OBS.: Como F(s) não envolve um impulso, f(t) é contínua em t = 0 e teremos $f(0_-) = f(0_+) = 1$.

A TRANSFORMADA INVERSA : FRAÇÕES PARCIAIS

Em um bom número de casos práticos, a transformada de Laplace tem a forma $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, onde N(s) e D(s) são polinômios, e o grau de N(s) é menor que o grau de D(s).

Quando o grau de N(s) for igual ou maior que o de D(s), a função f(t) envolve impulsos. Nesse caso, é melhor dividir os dois polinômios, explicitando os impulsos. Por exemplo, $F(s) = \frac{s}{s+1}$ pode ser escrita como $F(s) = 1 - \frac{1}{s+1}$.

A expansão em frações parciais consiste em escrever F(s) como uma soma das contribuições de cada pólo. Há uma série de regras práticas para esse fim. Vamos examinar alguns exemplos mais simples e imediatos, uma vez que casos mais complicados podem facilmente ser trabalhados com softwares especializados. A demonstração dessas regras pode ser encontrada nos livros texto.

Caso 1 : Pólos simples

Cada pólo simples (−α) dá origem a uma fração $\frac{A}{s+\alpha}$,onde A é chamado de resíduo do pólo e pode ser encontrado rapidamente pela regra $A = (s+\alpha)F(s)\big|_{s=-\alpha}$.

$$\text{Exemplo: } F(s) = \frac{28s}{(s+1)(s+8)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+8}$$

$$A = \left.\frac{28s}{s+8}\right|_{s=-1} = \frac{28(-1)}{(-1+8)} = -4 \quad ; \quad B = \left.\frac{28s}{s+1}\right|_{s=-8} = \frac{28(-8)}{(-8+1)} = 32$$

$$\text{Portanto, } F(s) = \frac{32}{s+8} - \frac{4}{s+1} \text{ e teremos } f(t) = 32e^{-8t} - 4e^{-t}$$

(Note que podemos verificar que o resultado obedece aos teoremas dos valores inicial e final: f(0) = 28 e f(∞) = 0)

Caso 2 : Pólos duplos

Cada pólo duplo (−α) dá origem a duas frações, $\frac{A}{(s+\alpha)^2}$ e $\frac{B}{s+\alpha}$. O valor de A pode ser encontrado pela regra $A = (s+\alpha)^2 F(s)\big|_{s=-\alpha}$, e $B = \left[\frac{d}{ds}(s+\alpha)^2 F(s)\right]\Big|_{s=-\alpha}$.

Exemplo: $F(s)=\dfrac{20}{s^2(s+2)}=\dfrac{A}{s^2}+\dfrac{B}{s}+\dfrac{C}{s+2}$

$$A=\left.\frac{20}{s+2}\right|_{s=0}=10 \quad ; \quad B=\frac{d}{ds}\left[\frac{20}{s+2}\right]\Bigg|_{s=0}=\left[\frac{-20}{(s+2)^2}\right]\Bigg|_{s=0}=-5 \quad ; \quad C=\left.\frac{20}{s^2}\right|_{s=-2}=5$$

Portanto, $F(s)=\dfrac{10}{s^2}-\dfrac{5}{s}+\dfrac{5}{s+2}$ e teremos $f(t)=10t-5+5e^{-2t}$.

(o resultado obedece aos teoremas dos valores inicial e final: f(0) = 0 e f(∞) = ∞)

Caso 3 : Par de pólos complexos conjugados

Se $(-\sigma \pm j\omega)$ são pólos complexos de F(s), onde $j^2 = -1$, é conveniente determinar diretamente a transformada inversa da parte que corresponde a essa oscilação amortecida, $r(t)=Me^{-\sigma t}\text{sen}(\omega t+\phi)$. Se os pólos $(-\sigma \pm j\omega)$ são raízes de $(s^2 + ps + q)$, e esse termo aparece explicitamente no denominador de F(s), a amplitude M e a fase ϕ podem ser calculadas pela formula

$$M\underline{\lfloor \phi} = \frac{1}{\omega}\left[(s^2+ps+q)F(s)\right]_{s=-\sigma+j\omega}$$

Exemplo: $F(s)=\dfrac{850}{s(s^2+10s+425)}=\dfrac{A}{s}+R(s)$

$$A=\left.\frac{850}{s^2+10s+425}\right|_{s=0}=2$$

As raízes de $s^2 + 10s + 425 = 0$ são $-5 \pm j20$, de modo que

$$M\underline{\lfloor \phi}=\left.\frac{1}{20}\frac{850}{s}\right|_{s=-5+j20}=\frac{1}{20}\frac{850}{-5+j20}=\frac{1}{20}\frac{850(-5-j20)}{425}=-0{,}5-j2\cong 2{,}06\underline{\lfloor -104^\circ}$$

Portanto, teremos $f(t)=2+2{,}06e^{-5t}\text{sen}(20t-104^\circ)$

(o resultado obedece aos teoremas dos valores inicial e final: f(0) = 0 e f(∞) = 2)

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Um problema de valor inicial que envolve uma e.d. linear a coeficientes constantes transforma-se em um problema algébrico no domínio da freqüência. As condições iniciais são englobadas na transformada.

Exemplo: Encontrar a função f(t) que satisfaz $\begin{cases} f''+7f'+10f=30 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=9 \end{cases}$

Passando o problema para o domínio da freqüência:

$$\mathcal{L}\{f'\}=sF(s)-f(0)=sF$$
$$\mathcal{L}\{f''\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2F-9$$

$$\mathcal{L}\{f''+7f'+10\}=\mathcal{L}\{30\}$$

$$s^2F-9+7sF+10F=\frac{30}{s} \quad \Rightarrow \quad (s^2+7s+10)F=\frac{30}{s}+9=\frac{30+9s}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s)=\frac{30+9s}{s(s^2+7s+10)}$$

As raízes do denominador (pólos) são 0, −2 e −5. Expandindo F(s) em frações parciais, encontramos $F(s)=\dfrac{3}{s}-\dfrac{2}{s+2}-\dfrac{1}{s+5}$. Portanto, a solução é $f(t)=3-2e^{-2t}-e^{-5t}$.

RESUMO DAS TRANSFORMADAS BÁSICAS E DAS PROPRIEDADES

Transformadas	
f(t)	F(s)
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
sen(ωt)	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cos(ωt)	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
δ(t)	1

Propriedades	
f(t)	F(s)
f(t) + g(t)	F(S) + G(S)
A.f(t)	A.F(S)
$e^{-\alpha t}f(t)$	F(s + α)
t.f(t)	$-\frac{dF}{ds}$
t^n.f(t)	$(-1)^n \frac{d^nF}{ds^n}$
$\frac{df}{dt}$	sF(s) – f(0)
$\frac{d^2f}{dt^2}$	s^2F(s) – sf(0) – f′(0)

TEOREMA DO VALOR INICIAL : $f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

TEOREMA DO VALOR FINAL : $f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

EXERCÍCIOS

1. Determine as transformadas de Laplace das funções abaixo.

   (a) $f(t) = 20e^{-3t}\cos(50\pi t)$

   (b) $f(t) = 3te^{-5t}$

   (c) $f(t) = 35t^2e^{-3t}$

   (d) $f(t) = 3t\,\text{sen}(10\pi t)$

   (e) g(t) = f′(t), onde $f(t) = 35t^2e^{-3t}$

   (f) h(t) = f′(t), onde $f(t) = 20e^{-3t}\cos(50\pi t)$

2. Se a transformada de laplace de f(t) é $F(s) = \frac{10}{s+2}$, encontre as transformadas das funções:

   (a) $g(t) = 5e^{-2t}f(t)$ (b) h(t) = 10tf(t) (c) $m(t) = \frac{df}{dt}$ (d) $p(t) = \frac{d^2f}{dt^2}$

3. Repita o problema anterior no caso em que $F(s) = \frac{5(s+2)}{s(s^2+4)}$

FÓRMULAS PARA A EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

Seja $$F(s) = \frac{N(s)}{(s-a).(s-b)^2.(s^2+ps+q)}$$

Temos

- um pólo simples em $s = a$
- um pólo duplo em $s = b$
- um par de pólos complexos conjugados em $s = (\alpha \pm j\beta)$.

N(s) é um polinômio de grau menor do que 5.

A expansão em frações parciais será, nesse caso,

$$F(s) = \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)^2} + \frac{C}{(s-b)} + R(s)$$

Onde $A = (s-a)F(s)\big|_{s=a}$ $\qquad B = (s-b)^2 F(s)\big|_{s=b}$ $\qquad C = \left[\frac{d}{ds}(s-b)^2 F(s)\right]\Big|_{s=b}$

e a transformada inversa de R(s) é $r(t) = Me^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t + \phi)$

onde $$M\underline{|\phi} = \frac{1}{\beta}\left[(s^2+ps+q)F(s)\right]_{s=\alpha+j\beta}$$

---

4. Dada a transformada de Laplace F(s),

   - marque os pólos (✕) e zeros (○) de F(s) no plano complexo;
   - determine os valores de f(0) e f(∞) utilizando os teoremas do valor inicial e final;
   - encontre f(t) para t > 0

(a) $F(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)}$ (b) $F(s) = \frac{30}{s(s^2+5s+6)}$ (c) $F(s) = \frac{5}{3s^2+s}$

(d) $F(s) = \frac{s^2+100}{s^3+3s^2+2s}$ (e) $F(s) = \frac{15s(s+2)}{(s+4)(s^2+4s+3)}$ (f) $F(s) = \frac{10}{s^2(s+2)}$

(g) $F(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)}$ (h) $F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)^2}$ (i) $F(s) = \frac{100}{s^2+4s+104}$

(j) $F(s) = \frac{100(s+2)}{s^2+4s+104}$ (k) $F(s) = \frac{260}{(s+1)(s^2+4s+29)}$ (l) $F(s) = \frac{400s^2}{(s+1)(s^2+2s+101)}$

5. Resolver os seguintes problemas de valor inicial, encontrando f(t) para t > 0:

(a) $\begin{cases} f'(t) + 3f = 18t \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f'' + 4f' + 3f = 5e^{-2t} \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = -4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} v'' + 10^4 v = 10^5 \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} v'' + v' + v = 0 \\ v(0) = 10 \\ v'(0) = -10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} v'' + 2v' + v = 0 \\ v(0) = 10 \\ v'(0) = -20 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} v'' + 4v' + v = 0 \\ v(0) = 10 \\ v'(0) = -40 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} f'' + 4f' + 13f = 26 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 20 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} f'' + 4f' + 4f = 200 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} f'' + 2f' + 4f = 200 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} f'' + 4f = 200 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} f'' + 0{,}2f' + 25f = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 200 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} v' + 2v = 10\,\mathrm{sen}(\pi t) \\ v(0) = 0 \end{cases}$

3ª Série de Exercícios - RESPOSTAS

1. (a) $F(s)=\dfrac{20(s+3)}{(s+3)^2+(50\pi)^2}$ (b) $F(s)=\dfrac{3}{(s+5)^2}$ (c) $F(s)=\dfrac{70}{(s+3)^3}$

(d) $F(s)=\dfrac{60\pi s}{\left[s^2+(10\pi)^2\right]^2}$ (e) $G(s)=\dfrac{70s}{(s+3)^3}$ (f) $H(s)=\dfrac{20s(s+3)}{(s+3)^2+(50\pi)^2}-20$

---

2. (a) $G(s)=\dfrac{50}{s+4}$ (b) $H(s)=\dfrac{100}{(s+2)^2}$ (c) $M(s)=-\dfrac{20}{s+2}$ (d) $P(s)=\dfrac{40}{s+2}$

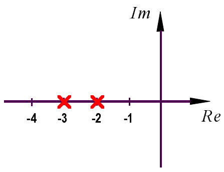
3. (a) $G(s)=\dfrac{25(s+4)}{(s+2)(s^2+4s+8)}$ (b) $H(s)=10\dfrac{s^3+3s^2+4}{s^2(s^2+4)^2}$ (c) $M(s)=\dfrac{5(s+2)}{s^2+4}$ (d) $P(s)=\dfrac{10(s-2)}{s^2+4}$

4.

(a) $f(0)=0$

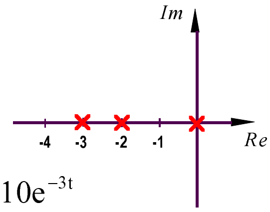
$f(\infty)=0$

$f(t)=5e^{-2t}-5e^{-3t}$



(b) $f(0)=0$

$f(\infty)=5$

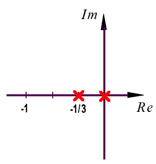


$f(t)=5-15e^{-2t}+10e^{-3t}$

(c) $f(0)=0$

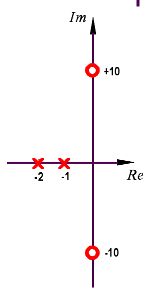
$f(\infty)=5$

$f(t)=5-5e^{-t/3}$



(d) $f(0)=1$

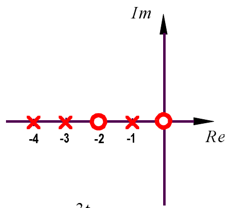
$f(\infty)=5$



$f(t)=5-11e^{-t}+7e^{-2t}$

(e) $f(0)=15$

$f(\infty)=0$

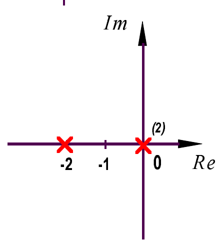


$f(t)=40e^{-4t}-2{,}5e^{-t}-22{,}5e^{-3t}$

(f) $f(0)=0$

$f(\infty)\to\infty$

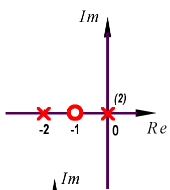
$f(t)=5t-2{,}5+2{,}5e^{-2t}$



(g) $f(0)=0$

$f(\infty)\to\infty$

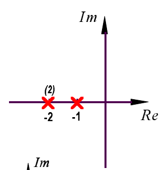
$f(t)=5t-2{,}5e^{-2t}+2{,}5$



(h) $f(0)=0$

$f(\infty)=0$

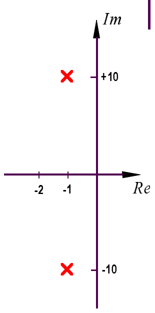
$f(t)=10(2t+1)e^{-2t}-10e^{-t}$



(i) $f(0)=0$

$f(\infty)=0$

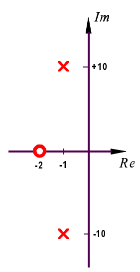
$f(t)=10e^{-2t}\,\mathrm{sen}(10t)$



(j) $f(0)=100$

$f(\infty)=0$

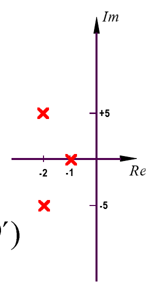
$f(t)=100e^{-2t}\cos(10t)$



(k) $f(0)=0$

$f(\infty)=0$

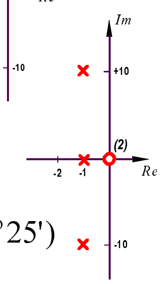
$f(t)=10e^{-t}+10{,}2e^{-2t}\cos(5t-191^{\circ}19')$



(l) $f(0)=400$

$f(\infty)=0$

$f(t)=4e^{-t}+404e^{-t}\,\mathrm{sen}(10t+101^{\circ}25')$



5. (a) $f(t)=2e^{-3t}+6t-2$

(b) $f(t)=2e^{-t}+4e^{-3t}-5e^{-2t}$

(c) $v(t)=10-10\cos(100t)$

(d) $v(t)=11{,}55e^{-t/2}\,\text{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t+120^{o})$

(e) $v(t)=10(1-t)e^{-t}$

(f) $v(t)=10{,}77e^{-3{,}73t}-0{,}774e^{-0{,}268t}$

(g) $f(t)=2+5{,}696e^{-2t}\,\text{sen}(3t-20^{o}33')$

(h) $f(t)=50-50(2t+1)e^{-2t}$

(i) $f(t)=50+57{,}74e^{-t}\cos(\sqrt{3}t+150^{o})$

(j) $f(t)=50-50\cos(2t)$

(k) $f(t)=40e^{-0{,}1t}\,\text{sen}(5t)$

(l) $v(t)=2{,}265e^{-2t}+2{,}685\,\text{sen}(\pi t-57^{o}31')$
