CÁLCULO III

1º Semestre de 2010

Prof. Maurício Fabbri

3ª Série de Exercícios - *Equações diferenciais ordinárias*

PRELIMINARES

(I) Uma *equação diferencial* é uma relação que deve ser satisfeita por uma função e suas derivadas. Se a função é de apenas uma variável, teremos uma equação diferencial *ordinária*. No caso de funções de várias variáveis, teremos equações diferenciais *parciais* (envolvendo as derivadas parciais da função).

Em uma equação diferencial (*e.d.*), a incógnita é uma função. A e.d. pode vir suplementada de algumas condições sobre a função procurada. Nos casos mais comuns, essas condições são chamadas de condições iniciais (CI) (caso a equação se refira a um problema que representa uma evolução no tempo) ou de condições de contorno (CC) (caso o problema se refira a uma função que representa um perfil no espaço).

Uma e.d. suplementada por CI´s é chamado de um *problema de valor inicial*.
Uma e.d. suplementada por CC´s é chamado de um *problema de valor de contorno*.

Consideremos alguns exemplos preliminares, que ilustram as técnicas e as propriedades que veremos adiante.

(II) Exemplo 1 : procura-se f(x) tal que $\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = x \\ f(0) = 2 \end{cases}$ (problema de valor inicial)

Solução: basta lembrar que a primitiva de x é $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + K$. Para satisfazer a condição inicial, devemos escolher K = 2 , e então a solução do problema é $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$

(III) Exemplo 2 : procura-se f(x) tal que $\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = f \\ f(0) = 2 \end{cases}$ (ou $f' - f = 0$)

Solução: a função cuja derivada é ela mesma é a exponencial. $f(x) = e^x$ satisfaz a e.d., mas não a condição inicial f(0) = 2. Lembramos então que podemos fazer $f(x) = Ke^x$, onde K é uma constante. Portanto, a solução procurada é $f(x) = 2e^x$.

Compare esta solução com o Exemplo 1:

- a e.d $f' = f$ é homogênea (isto é, a função nula $f \equiv 0$ é solução). A e.d. do Exemplo 1 ***não é*** homogênea.
- Cuidado: a função $f(x) = e^x + K$ ***não é*** solução do problema (verifique!!!).

(IV) Exemplo 3 : procura-se f(x) tal que $\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = f^2 \\ f(0) = 2 \end{cases}$ (ou $f' - f^2 = 0$)

Solução: esta e.d. *não é linear* (isto é, a parte que envolve a função desconhecida f(x) não pode ser escrita como uma combinação linear entre f(x) e suas derivadas). Equações diferenciais não-lineares são, em geral, muito difíceis de se resolver – não há uma teoria geral que leve diretamente à solução, e em muitos casos nem sequer sabemos se há alguma solução.

Felizmente, este caso é simples (trata-se de um tipo de e.d. chamado de "separável", porque podemos separar as quantidades f e x em cada lado da equação). Na verdade, basta lembrar que a função cuja derivada é igual a ela mesma ao quadrado, e que envolve uma constante arbitrária (para podermos ajustar a condição inicial) é $f(x) = -\dfrac{1}{x+K}$. Para que f(0) = 2, escolhemos K = −1/2, e então a solução procurada é $f(x) = \dfrac{2}{1-2x}$.

(V) Exemplo 4 : procura-se f(x) tal que
$$\begin{cases} \dfrac{d^2f}{dx^2} = 2 \qquad \text{(ou } f'' = 2\text{)} \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = -3 \end{cases}$$

Solução: A função que, derivada duas vezes em sucessão, dá 2, é $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + Ax + B$, onde A e B são constantes. Para satisfazer as CI´s, fazemos B = 2 e A = −3, de modo que a solução do problema de valor inicial é $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 2$.

Note que a e.d. é de segunda ordem, isto é, a maior ordem da derivada que aparece na equação é 2.

Note que o número de condições iniciais que podem ser satisfeitas pela solução é igual à ordem da equação.

(VI) Exemplo 5 : procura-se f(t) tal que
$$\begin{cases} f'' + 5f' + 6f = 0 \\ f(0) = 3 \\ f'(0) = -5 \end{cases}$$

Solução: Note a semelhança deste caso com o Exemplo 2. Para que a combinação $f'' + 5f' + 6f$ resulte numa função nula, é preciso que as derivadas de f(t) possam ser escritas como uma combinação simples (linear) entre elas mesmas. Isto ocorre quando $f(t) = e^{\alpha t}$, onde α é uma constante, porque então teremos $f' = \alpha e^{\alpha t}$ e $f'' = \alpha^2 e^{\alpha t}$. Substituindo esse tipo de função na e.d., encontramos que o parâmetro α deve satisfazer à equação algébrica de segundo grau:

$$\alpha^2 + 5\alpha + 6 = 0 \qquad \textit{(chamada de equação característica da e.d.)}$$

As raízes dessa equação são −2 e −3, e assim encontramos duas funções que satisfazem a e.d. : $f_1(t) = e^{-2t}$ e $f_2(t) = e^{-3t}$. Mas nenhuma dessas funções, sozinha, é capaz de satisfazer às condições iniciais.

O próximo passo importante é usar o fato de que a e.d. em questão é linear e homogênea.

→ *Mostre que, se as funções f(t) e g(t) são soluções da e.d.* $f'' + 5f' + 6f = 0$, *então qualquer combinação linear das duas, h(t) = A.f(t) + B.g(t), também é solução.*

Tomamos então como solução da e.d. pedida a função $f(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t}$. As constantes A e B são determinadas de modo a satisfazer as condições iniciais.

→ *Mostre que a solução deste problema de valor inicial é* $f(t) = 4e^{-2t} - e^{-3t}$

(VII) Exemplo 6 : procura-se f(t) tal que $\begin{cases} f'' + 5f' + 6f = 12 \\ f(0) = 3 \\ f'(0) = -5 \end{cases}$

Solução: Este caso é bastante parecido com o Exemplo anterior, mas agora a e.d. não é homogênea.

O primeiro passo é perceber que f(x) = 2 é uma solução óbvia da e.d.. Essa solução é chamada de *solução particular*, porque é apenas uma das várias funções que satisfazem a e.d.. Certamente essa função simples não é capaz de satisfazer as condições iniciais.

O passo final é perceber que, se somarmos à solução particular as soluções da *equação homogênea associada* $f'' + 5f' + 6f = 0$, a função resultante vai satisfazer a e.d. completa $f'' + 5f' + 6f = 12$.

Portanto, tomamos para solução a função $f(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t} + 2$. Como no exemplo anterior, calculamos as constantes A e B de modo a satisfazer as condições iniciais.

→ *Mostre que a solução deste problema de valor inicial é* $f(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t} + 2$

(VIII) Exemplo 7 : procura-se f(t) tal que $\begin{cases} f'' = f \qquad \text{(ou } f'' - f = 0\text{)} \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

Solução: Este é fácil. A função que, derivada duas vezes em sucessão, fica igual a ela mesma é e^x. Pensando melhor, serve também a função e^{-x}. Como a e.d. é linear e homogênea, a função g(x) = $A.e^x + B.e^{-x}$ é uma solução capaz de satisfazer as condições iniciais. Calculando A e B, encontramos a solução pedida : f(x) = $e^x + e^{-x}$.

Note que as funções e^x e e^{-x} poderiam ser encontradas resolvendo a equação característica da e.d.(usando a mesma técnica do Exemplo 5), que é $\alpha^2-1=0$.

(IX) Exemplo 8 : procura-se f(t) tal que $\begin{cases} f'' = -f \qquad \text{(ou } f'' + f = 0\text{)} \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

Solução: Note que há apenas uma mudança de sinal em comparação ao Exemplo anterior, mas agora as exponenciais não satisfazem à e.d.. As funções corretas, neste caso, são sen(x) e cos(x). A solução do problema é f(x) = 2cos(x) .

A equação característica da e.d. é $\alpha^2 + 1 = 0$, que não admite soluções reais. As soluções complexas são $\pm j$ (onde $j^2 = -1$), e quando montamos duas exponenciais complexas e escrevemos a solução como $f(x) = Ae^{jx} + Be^{-jx}$, isto é equivalente a f(x) = Psen(x) + Qcos(x).

→ *Utilizando a forma* $f(x) = Ae^{jx} + Be^{-jx}$ *, calcule A e B de modo a satisfazer as CI e mostre que a solução é exatamente f(x) = 2cos(x). Lembre-se da fórmula de Euler :* $e^{jx} = cos(x) + jsen(x)$.

TÉCNICA GERAL

Os exemplos acima ilustram a técnica geral de solução que segue, no caso de equações diferenciais ordinárias lineares de segundo grau a coeficientes constantes. Essas e.d.´s tem a forma geral $f'' + af' + bf = g(t)$, onde a e b são constantes e g(t) é uma função conhecida (chamada de "função forçante", porque, na prática, corresponde a uma excitação imposta externamente ao sistema em estudo).

(X) DEFINIÇÕES:

- Uma função h(t) que satisfaz à equação diferencial é chamada de *solução particular* da e.d.

- O conjunto de todas as soluções da e.d. é chamado de *solução geral* da mesma.

- A e.d. $f'' + af' + bf = 0$ é chamada de *"homogênea associada"* à e.d. $f'' + af' + bf = g(t)$.

(XI) TEOREMA: A solução geral da e.d. $f'' + af' + bf = g(t)$ é a soma de uma solução particular com a solução geral da sua homogênea associada.

Exemplo: A função $f_p(t) = 2t^2 - 2t + 1$ é uma solução particular da e.d. $f'' + 5f' + 6f = 12t^2 + 8t$.
A solução geral da homogênea associada $f'' + 5f' + 6f = 0$ é $f_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t}$
A solução geral da e.d. $f'' + 5f' + 6f = 12t^2 + 8t$ é $f(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t} + 2t^2 - 2t + 1$, onde A e B são constantes quaisquer.

A solução particular também é conhecida como *"resposta forçada"*, porque é a parte da solução causada pela função forçante g(t).

A solução da homogênea associada é conhecida como *"resposta natural"*, porque é a parte da solução que corresponde ao comportamento intrínseco do sistema descrito pela e.d..

Quando a solução da homogênea decai com o tempo, ela é chamada de *"solução transiente"*, e a solução particular de *"solução de regime"*.

(XII) A solução geral da e.d. homogênea $f'' + af' + bf = 0$ é obtida como segue:

1. Encontre as raízes da equação característica $x^2 + ax + b = 0$;
2. Se as raízes forem α e β, distintas e reais, a solução geral pode ser escrita como $Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$
3. Se a raiz for dupla = α , a solução geral é $(A + Bt)e^{\alpha t}$
4. Se as raízes forem complexas conjugadas = $\alpha \pm j\beta$, a solução geral pode ser escrita como $Me^{\alpha t}\cos(\beta t + \phi)$ ou como $e^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\mathrm{sen}(\beta t)]$

A, B, M e ϕ são constantes arbitrárias.

(XIII) Não há uma técnica que funcione sempre para encontrar uma solução particular. Em alguns casos, a solução particular é óbvia. Na maioria dos casos de interesse prático, tenta-se uma combinação linear entre g(t) e suas derivadas.

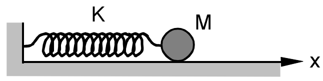
Exemplo: Considere a e.d. $f'' + 5f' + 6f = 12t^2 + 8t$. A função forçante g(t) e suas derivadas tem a forma geral $Pt^2 + Qt + R$. Substituindo essa função na e.d., encontramos P = 2, Q = −2 e R = 1. Logo, uma solução particular é $2t^2 - 2t + 1$.

EXEMPLOS CLÁSSICOS

Uma e.d. de segunda ordem linear a coeficientes constantes descreve um sistema descrito, internamente, por uma força de restauração linear e por uma força de atrito viscoso (dissipação). Os exemplos clássicos são o oscilador mecânico e o oscilador elétrico passivo.

(XIV) *O OSCILADOR MECANICO*. Consiste em uma massa M presa a uma mola de constante elástica K. Ao se mover, a massa fica sujeita a uma força de atrito viscoso proporcional à velocidade da mesma. Seja x(t) a posição da massa, contada a partir do local de equilíbrio. A força restauradora da mola sobre a massa é $F_m = -K.x$, e a força de atrito viscoso é $F_a = -\lambda.v = -\lambda.dx/dt$. A equação diferencial para x(t) é obtida aplicando a 3ª Lei de Newton ao movimento da massa. O resultado é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{M}x = 0$$



Se houver também uma força externa F_{ext} imposta à massa M, a e.d. terá a forma

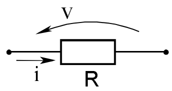
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{M}x = \frac{F_{ext}}{M}$$

Se o atrito λ for grande em comparação com a força de restauração da mola, a solução x(t) será apenas uma combinação entre duas exponenciais amortecidas. Se o termo de atrito for pequeno, a massa vai executar uma oscilação amortecida.

As condições iniciais do problema, $x(0)$ e $x'(0)$, correspondem à posição e velocidade iniciais da massa.

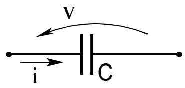
(XV) *O OSCILADOR ELÉTRICO*. Um circuito RLC tem três componentes elétricos passivos:

− o resistor, que obedece à lei de Ohm:



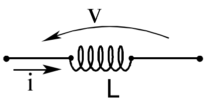
$\boxed{v = Ri}$

− o capacitor, que funciona como armazenador de carga:



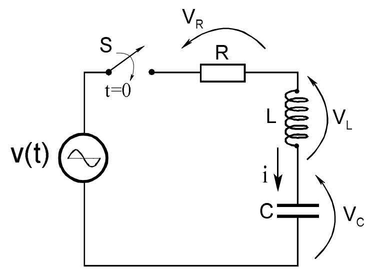
$\boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$

− o indutor, que armazena energia em um campo magnético e reage a variações de corrente:



$\boxed{v = L\frac{di}{dt}}$

O circuito RLC série tem o esquema elétrico ao lado. A corrente elétrica i(t) é a mesma em cada componente, e o potencial da fonte V deve igualar a soma das quedas de potencial em cada elemento:



$$V = V_R + V_C + V_L \,.$$

→ *Mostre que a corrente elétrica i(t) pelo circuito obedece à equação diferencial*

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{dV}{dt}$$

Essa equação é análoga ao caso do oscilador mecânico. O resistor R desempenha o papel da força dissipativa (atrito). Para R suficientemente pequeno, a corrente elétrica vai executar uma oscilação amortecida.

As condições iniciais do problema, $i(0)$ e $i'(0)$, dependem do estado inicial do capacitor e do indutor.

EXERCÍCIOS

1. Dada a equação diferencial $\frac{d^2f}{dt^2}+10\frac{df}{dt}+125f(t)=1000$

(a) Determine a solução geral $f_h(t)$ da homogênea associada;
(b) Determine uma solução particular $f_p(t)$;
(sugestão: Suponha $f_p(t) = K$, substitua na e.d. e determine o valor de K)
(c) Escreva a forma da solução geral;
(d) Encontre a solução do problema de valor inicial $\begin{cases} f''+10f'+125f=1000 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

---

2. Dada a equação diferencial $\frac{d^2f}{dt^2}+5\frac{df}{dt}+6f(t)=12t+4$,

(a) Determine a solução geral $f_h(t)$ da homogênea associada;
(b) Determine uma solução particular $f_p(t)$;
(sugestão: Suponha $f_p(t) = At + B$, substitua na e.d. e determine A e B)
(c) Escreva a forma da solução geral;
(d) Encontre a solução do problema de valor inicial $\begin{cases} f''+5f'+6f=12t+4 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases}$

---

3. Resolver, pelo método clássico, os seguintes problemas de valor inicial, encontrando f(t) para t>0:

(a) $\begin{cases} f'(t)+3f=18t \\ f(0)=0 \end{cases}$

(sugestão: a solução particular é da forma $f_P(t) = At + B$)

(b) $\begin{cases} f''+4f'+3f=5e^{-2t} \\ f(0)=1 \\ f'(0)=-4 \end{cases}$

(sugestão: a solução particular é da forma $f_P(t) = Ae^{-2t}$)

(c) $\begin{cases} v''+10^4v=10^5 \\ v(0)=0 \\ v'(0)=0 \end{cases}$

(sugestão: a solução particular é da forma $f_P(t) = K$)

(d) $\begin{cases} v''+v'+v=0 \\ v(0)=10 \\ v'(0)=-10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} v''+2v'+v=0 \\ v(0)=10 \\ v'(0)=-20 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} v''+4v'+v=0 \\ v(0)=10 \\ v'(0)=-40 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} f''+4f'+13f=26 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=20 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} f''+4f'+4f=200 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} f''+2f'+4f=200 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

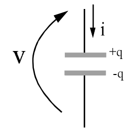
(j) $\begin{cases} f''+4f=200 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} f''+0{,}2f'+25f=0 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=200 \end{cases}$

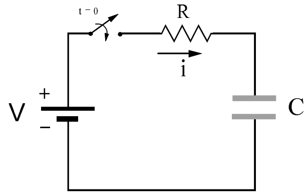
(l) $\begin{cases} v'+2v=10\,\text{sen}(\pi t) \\ v(0)=0 \end{cases}$

sugestão: a solução particular é da forma $f_P(t) = A\text{sen}(\pi t)+B\cos(\pi t)$

4. A carga armazenada em um capacitor é dada por q = C.v, onde v é a diferença de potencial entre os terminais do mesmo e C o valor da capacitância. A corrente elétrica que flui para o mesmo é $i = \dfrac{dq}{dt}$.



O capacitor no circuito ao lado está descarregado quando a chave fecha no instante t=0.



(a) Escreva a equação diferencial para a corrente elétrica i(t), válida para t > 0. O resistor segue a lei de ohm, isto é, a ddp v_R sobre o mesmo e a corrente i_R através do resistor satisfazem $v_R = R.i_R$.

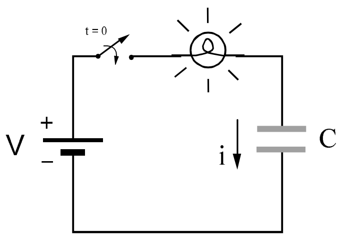
(b) Qual o valor de i(0) ? *(condição inicial)*

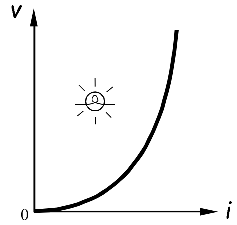
(c) Resolva o problema de valor inicial para i(t). Esboce o gráfico da corrente *versus* tempo. Qual o tempo necessário para carregar o capacitor? Qual o valor final da carga que ele vai armazenar?

(d) Calcule o tempo de carga e o valor da carga armazenada se V = 100volts, R = 200Ω e C = 2μF.

---

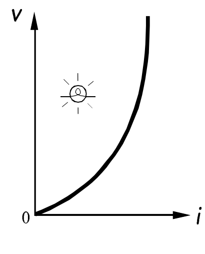
5. Resolva a questão anterior na caso do resistor ser substituído por um dispositivo não-linear (por exemplo, uma pequena lâmpada incandescente). Suponha que a característica elétrica da lâmpada seja da forma $v = \lambda.i^2$, onde λ é uma constante. Para o item (d), utilize os dados V = 100volts, $\lambda = 400 V/A^2$ e C = 2μF.





---

6. Resolva novamente questão anterior se a característica elétrica da lâmpada for exponencial, da forma $v = A\left(e^{\lambda.i} - 1\right)$, onde A e λ são constantes. Para o item (d), utilize os dados V = 100volts, A = 5V, $\lambda = 6A^{-1}$ e C = 2μF.

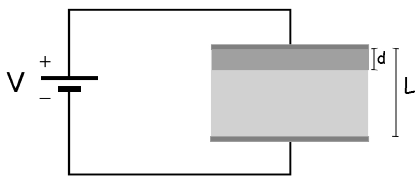


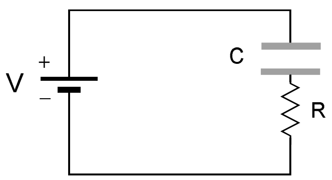
---

7. Em temperaturas altas, a condução iônica através dos dielétricos fica significativa. Por exemplo, o vidro comum possui uma quantidade apreciável de sódio, que se liga a átomos de oxigênio formando pares iônicos $Na^+ - O_2^-$. Se aquecido em torno de 300ºC, esses íons de sódio são facilmente deslocados por um campo elétrico razoavelmente forte. *(esse é o princípio do processo industrial de solda anódica, utilizado em microfabricação e patenteado em 1969)*

<u>*O modelo de Albaugh*</u> :

Uma lâmina de vidro, com metalização nas duas faces, funciona como um capacitor em série com um resistor. O capacitor representa a região do vidro próxima da placa positiva, que ficou depletada de íons de sódio (zona de depleção - ZD); o resistor representa o resto do vidro, que permaneceu com carga neutra.





Seja: p = densidade de íons de sódio no vidro neutro
S = área das lâminas de vidro
d = largura da zona de depleção
L = espessura da lâmina de vidro
ε = permitividade elétrica do vidro
ρ = resistividade elétrica do vidro

A carga elétrica que fica na região de depleção é $q = p.S.d$; lembrando que a capacitância de um capacitor feito de placas paralelas é $C = \varepsilon \frac{S}{d}$, a capacitância da zona de depleção será $C = \varepsilon \frac{pS^2}{q}$. O potencial elétrico total V será a soma das quedas de potencial na zona de depleção (V_C) e no resto do vidro (V_R). Para a zona de depleção, temos $q = C.V_C$; o valor do resistor equivalente ao resto do vidro é $R = \rho \frac{L-d}{S}$. Supondo que d << L *(verificaremos se essa hipótese é válida quando calcularmos o valor de d para o vidro comum)*, podemos usar $R = \rho \frac{L}{S}$.

(a) Obtenha uma equação diferencial para a carga q que fica armazenada na ZD, em função do tempo.

(b) Escreva a solução dessa equação diferencial, utilizando funções hiperbólicas.

DADOS: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad$ $\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad$ $\tanh(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)}$

$\text{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$ $\quad$ $\text{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$ $\quad$ $\frac{d}{dx}\tanh(x) = \text{sech}^2(x)$

(c) Esboce o gráfico de q *versus* tempo. Qual o valor da carga máxima Q_{max} que fica armazenada na ZD? Qual o valor máximo d_{max} da espessura da ZD?

(d) Obtenha a fórmula para a corrente elétrica i(t) pelo circuito em função do tempo. Esboce o gráfico i *versus* tempo. Compare com a carga de um capacitor comum. Qual o tempo necessário T para que o sistema atinja o equilíbrio?

(e) Quando V = 1000 volts, calcule Q_{max}, d_{max} e T para uma lâmina 10cm×10cm de 3,2mm de espessura de vidro Pyrex (Corning #7440), que tem as seguintes características (fornecidas pelo fabricante):

$$p = 2{,}77\times10^{8}\ \text{C/m}^3 \quad \varepsilon = 6{,}20\times10^{-11}\ \text{F/m} \quad \rho = 1{,}10\times10^{5}\ \Omega.\text{m}$$

Compare d_{max} com a espessura do vidro. A hipótese de que d << L é justificável?

(f) Calcule o campo elétrico médio no interior da ZD, e compare com o campo de ruptura do vidro, que é cerca de 10^7 V/cm. *(este resultado é uma das indicações de que o modelo é falho, por não considerar o deslocamento dos íons negativos dentro da ZD; a outra indicação é que a espessura de ZD que se observa na prática é da ordem de micrometros)*

2ª Série de Exercícios - RESPOSTAS

1. (a) $f_h(t) = Me^{-5t}\cos(10t + \phi)$ (b) $f_p(t) = 8$ (c) $f(t) = 8 + Me^{-5t}\cos(10t + \phi)$ (d) $f(t) = 8 + 8{,}94e^{-5t}\cos(10t + 153^o26')$

2. (a) $f_h(t) = Me^{-2t} + Ne^{-3t}$ (b) $f_p(t) = 2t - 1$ (c) $f(t) = 2t - 1 + Me^{-2t} + Ne^{-3t}$ (d) $f(t) = 2t - 1 + 2e^{-2t} - e^{-3t}$

3. (a) $f(t) = 2e^{-3t} + 6t - 2$ (b) $f(t) = 2e^{-t} + 4e^{-3t} - 5e^{-2t}$ (c) $v(t) = 10 - 10\cos(100t)$ (d) $v(t) = 11{,}55e^{-t/2}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 120^o)$

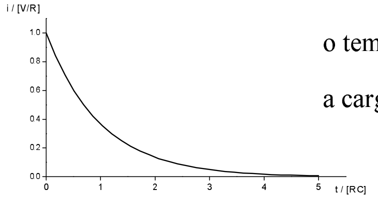
(e) $v(t) = 10(1-t)e^{-t}$ (f) $v(t) = 10{,}77e^{-3{,}73t} - 0{,}774e^{-0{,}268t}$ (g) $f(t) = 2 + 5{,}696e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t - 20^o33')$

(h) $f(t) = 50 - 50(2t+1)e^{-2t}$ (i) $f(t) = 50 + 57{,}74e^{-t}\cos(\sqrt{3}t + 150^o)$ (j) $f(t) = 50 - 50\cos(2t)$

(k) $f(t) = 40e^{-0{,}1t}\,\mathrm{sen}(5t)$ (l) $v(t) = 2{,}265e^{-2t} + 1{,}44\,\mathrm{sen}(\pi t) - 2{,}27\cos(\pi t) = 2{,}265e^{-2t} + 2{,}685\,\mathrm{sen}(\pi t - 57^o31')$

4. (a) $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$ (b) V/R

(c) $i(t) = \frac{V}{R}e^{-t/RC}$

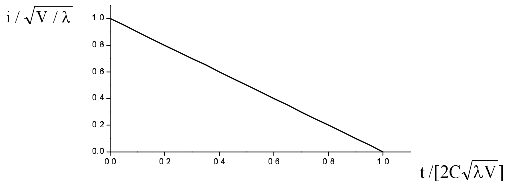


o tempo de carga será $\approx 3RC$;

a carga final no capacitor será Q = CV

(d) 1,2ms ; 200μC

5. (a) $i\frac{di}{dt} + \frac{i}{2\lambda C} = 0$ (b) $i(0) = \sqrt{\frac{V}{\lambda}}$ (c) $i(t) = \frac{-t}{2\lambda C} + \sqrt{\frac{V}{\lambda}}$



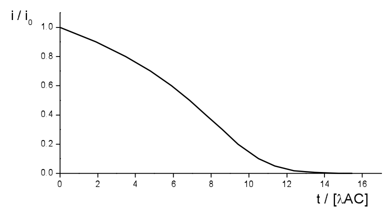
o tempo de carga será $2C\sqrt{\lambda V}$

a carga final no capacitor será Q = CV

(d) 0,8ms ; 200μC

6. (a) $e^{\lambda i}\frac{di}{dt} + \frac{i}{\lambda AC} = 0$ (b) $i_0 = \frac{1}{\lambda}\ln(1 + V/A)$

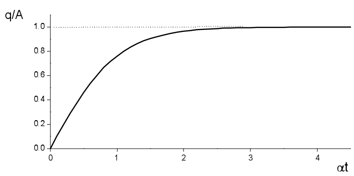
(c) e (d) A solução não pode ser obtida de forma explícita. A relação entre a corrente i e o tempo t pode ser escrita como $t = \lambda AC\int_{\lambda i}^{\lambda i_0}\frac{e^{\lambda x}}{x}dx$. Essa integral não pode ser resolvida em termos de funções elementares. (ela pode ser expressa usando uma função especial, chamada de "integral exponencial"). Para os valores V = 100volts, A = 5V, $\lambda = 6A^{-1}$ e C = 2μF, podemos efetuar essa integral numericamente (use uma calculadora programável ou o computador) e obtemos o gráfico ao lado para o decaimento da corrente durante a carga. A carga final no capacitor será Q = CV = 200μC, e o tempo para que a corrente caia para 5% do valor inicial é cerca de 0,68ms.

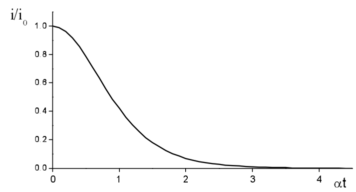


7. (a) $\frac{dq}{dt} + \frac{q^2}{\varepsilon pRS^2} = \frac{V}{R}$ (b) q = A.tanh(αt), onde $A = S\sqrt{\varepsilon pV}$ e $\alpha = \frac{1}{RS}\sqrt{\frac{V}{\varepsilon p}}$

(c) $Q_{max} = A = S\sqrt{\varepsilon pV}$

$d_{max} = \sqrt{\frac{\varepsilon V}{p}}$





(d) $i(t) = \frac{V}{R}\mathrm{sech}^2(\alpha t)$

a corrente inicial é $i_0 = V/R$

O tempo necessário para que a corrente caia a 5% do valor inicial é T = 2,18/α

A carga de um capacitor comum não apresenta essa mudança de concavidade no comportamento da corrente.

(e) $Q_{max} = 0{,}041C$; $d_{max} = 15\eta m$ (<< L) ; T = 32s

(f) 7×10^8 V/cm, que é mais de dez vezes maior do que o campo de ruptura do vidro.