CÁLCULO AVANÇADO

2º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri

SÉRIES NUMÉRICAS INFINITAS

1. Notação: $a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a_i é chamado de termo geral da série)

- ☞ Para que essa soma de infinitos termos tenha alguma chance de convergir, é necessário que o termo geral tenda a zero à medida que n aumenta, isto é, é preciso que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- ☞ Mas a condição $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ não garante a convergência da série.

2. Exemplos:

(a) A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *(essa série diverge, como veremos mais adiante)*

(b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *(uma série geométrica com razão ½. Veremos que ela converge para 2)*

(c) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+... = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ *(uma série alternada. Essa série converge para $\pi^2/12$)*

(d) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ *(essa série diverge, porque o termo geral não tende a zero)*

É comum o uso do símbolo de fatorial em séries numéricas, $n! = 1\times2\times3\times...\times n$ (0! é definido como sendo 1)

(e) $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ *(essa série converge para e = 2,71828182...)*

3. A notação de somatório; índices neutros.

Observe que o nome do índice utilizado na notação de somatório é irrelevante. Por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Os limites do índice também podem ser escolhidos, contanto que modifiquemos a fórmula adequadamente. Por exemplo, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{p=5}^{\infty}\frac{1}{p-4}$. Algumas vezes podemos encontrar o valor da soma de uma série simplesmente manipulando a fórmula do termo geral e mudando os índices.

Por exemplo, considere $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+... = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

O valor dessa soma pode ser facilmente encontrado como segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} = 1$$

Exercício 1: Complete as informações que estão faltando:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}=\sum_{n=}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{k=}^{\infty}\frac{1}{k-1}$

(b) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\displaystyle\sum_{n=}^{\infty}$

(c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\ldots=\displaystyle\sum_{j=}^{\infty}$

(d) $\frac{3}{2^3}-\frac{5}{4^3}+\frac{7}{6^3}-\frac{9}{8^3}+\ldots=\displaystyle\sum_{i=}^{\infty}$

(e) $\frac{3}{1\times 5^2}+\frac{5}{3\times 7^2}+\frac{7}{5\times 9^2}+\frac{9}{7\times 11^2}+\ldots=\displaystyle\sum_{i=}^{\infty}$

(f) $2-\frac{4}{1\times 2}+\frac{8}{1\times 2\times 3}-\frac{16}{1\times 2\times 3\times 4}+\ldots=\displaystyle\sum_{n=}^{\infty}$

Exercício 2: Encontre o valor das somas abaixo expandindo o operando em frações parciais e manipulando os índices de soma:

(a) $\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ (b) $\displaystyle S=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{6}{(n-3)(n+3)}$ (c) $\displaystyle S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{n(n-1)(n+1)}$

Respostas: (a) 11/18 (b) 49/20 = 2,45 (c) ¼

4. Somas parciais; convergência.

A soma parcial dos N primeiros termos da série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ é $\displaystyle S_N=\sum_{i=1}^{N}a_i=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_N$.

Dizemos que a série <u>converge</u> para S quando $\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N=S$. Se esse limite não existir, dizemos que a série <u>diverge</u>.

Para que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots$ seja convergente, é necessário *(mas não suficiente !)* que o termo geral tenda a zero, isto é, que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

<u>Exemplo 1</u> : a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots$ diverge, porque o termo geral tende a 1.

<u>Exemplo 2</u> : o termo geral da série $\displaystyle S=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ tende a zero. Isto não é suficiente para afirmar que S converge. (na verdade, S é a famosa série harmônica, que sabidamente diverge).

<u>Exemplo 3</u> : o termo geral da série $\displaystyle P=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{n^2}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ tende a zero. Mas apenas essa informação não permite concluir se P converge ou diverge. (pode-se provar que P converge para ln2).

5. Convergência absoluta

Dizemos que a série $\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é absolutamente convergente quando $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge.

<u>Exemplo 1</u> : a série $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ é absolutamente convergente, porque $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ converge para 2.

<u>Exemplo 2</u> : a série $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ é convergente, mas não é absolutamente convergente, porque $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ diverge.

Séries que são convergentes, mas não absolutamente convergentes, apresentam um comportamento curioso: o resultado da soma pode ser qualquer um, dependendo da ordem em que os termos são somados.

Por exemplo, se a série $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ é somada exatamente como indicado (primeiro 1, depois −1/2 , depois 1/3, e assim por diante), ela vai convergir para ln(2). Mas podemos fazer essa mesma série convergir para qualquer valor que quisermos: basta somar seus termos de maneira adequada. Por exemplo, se desejarmos que ela convirja para 5, procedemos assim:

- some primeiro alguns termos positivos, até que a soma exceda 5
- depois acrescente alguns termos negativos, até que a soma fique menor do que 5
- então adicione mais termos positivos, até que a soma fique maior do que 5
- em seguida acrescente mais termos negativos, até que a soma fique menor do que 5
- e assim por diante, de modo que a soma se aproxime cada vez mais de 5

Exercício 3: A série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ é convergente, mas $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ...$ diverge.

(a) Consultando uma tabela, encontramos que $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$ converge para π/4. Some os termos dessa série, nessa ordem, usando sua calculadora, até que o resultado se aproxime de π/4 até a terceira casa decimal. *(sugestão: use uma calculadora programável...)*

(b) Some os termos dessa série em sua calculadora, de modo que o resultado se aproxime de 0,900 até a terceira casa decimal. *(sugestão: use o computador...)*

(c) Some os termos dessa série em sua calculadora, de modo que o resultado se aproxime de −0,100 até a terceira casa decimal. *(use o computador...)*

6. Séries geométricas

O truque de Euler:

Para calcular $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, Euler procedeu como segue:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...\right) = 1 + \frac{1}{2}S \quad \Rightarrow \quad S = 1 + \frac{1}{2}S \quad \Rightarrow \quad 2S = 2 + S \quad \Rightarrow \quad S = 2$$

O procedimento acima pode ser feito de maneira rigorosa, nos casos em que a série converge. Na época de Euler, os conceitos de limite e convergência não tinham ainda sido desenvolvidos. O resultado moderno é o seguinte:

☞ A série geométrica $a_1 + qa_1 + q^2 a_1 + ...$ converge para $\frac{a_1}{1-q}$ se $|q| < 1$ e diverge se $|q| \geq 1$.

Exemplo 1 : a série $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$ converge para 2, pois é uma série geométrica com razão ½ .

Exemplo 2 : a série $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^i} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ...$ converge para 0,75, pois é uma série geométrica com razão −1/3 .

Exercício 4: Encontre o valor das somas seguintes *(quando necessário, dê a resposta com 4 significativos)*:

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$ (b) 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + ... (c) $S = 10\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ (d) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$

Respostas: (a) 1,5 (b) 10/9 (c) 6 (d) 1,582

7. Série harmônica e assemelhadas.

A série $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ é chamada de *série harmônica*, e sabidamente diverge.

(uma demonstração simples e instrutiva disso foi feita por Oresme na idade média)

A série harmônica generalizada $S_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Exemplo 1 : a série $Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ...$ diverge, pois é uma série harmônica generalizada com p = ½.

Exemplo 2 : a série $R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$ converge, pois é uma série harmônica generalizada com $p = 2$.

O valor de S_p pode ser encontrado em tabelas ou através de algoritmos numéricos sofisticados. Por exemplo, $S_2 = \pi^2/6$ e $S_3 = 1{,}0517997902646449997 2...$

Se p for um número complexo, S_p é conhecida como a função Zeta de Riemann, $\zeta(p)$.

8. Séries alternadas

Séries alternadas estritamente decrescentes (isto é, $|a_i| < |a_j|$ se i > j), convergem se o termo geral tender a zero. Nesse caso, o erro de truncamento é menor que o primeiro termo que foi desprezado.

Exemplo 1 : a série $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ converge, uma vez que é alternada e o termo geral tende a zero.

Seja P_k a soma dos k primeiros termos de P. Temos:

$P_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0{,}833\ldots$ Como o quarto termo de P é 1/4 = 0,25 , podemos afirmar que $P = 0{,}833\ldots \pm 0{,}25$.

$P_7 = 0{,}75952\ldots$ Como o oitavo termo de P é 1/8 = 0,125, podemos afirmar que $P = 0{,}7595\ldots \pm 0{,}125$.

As séries alternadas são bastante convenientes em problemas práticos de engenharia, uma vez que é possível calcular facilmente o erro de truncamento.

Exercício 5: A função erro, erf(x), descreve uma importante distribuição de probabilidades, e pode ser definida pela série infinita:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots \right)$$

Calcule o valor de erf(0,56) com precisão de, no mínimo, ±0,00001.

(confira o roteiro de cálculos na resolução da primeira série de exercícios, e forneça a resposta na forma padronizada)

Respostas corretas: 0,5716172± 0,0000015
0,571617± 0,000002
0,57162± 0,00001

9. (*O critério da razão*) Seja $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Se L < 1, a série é absolutamente convergente.
Se L > 1, a série é divergente.
Se L = 1, nada se pode afirmar.

Exemplo : Considere $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + 1 + \frac{25}{32} + \ldots$

Teremos $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \dfrac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$. Então $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}$, e portanto a série converge.

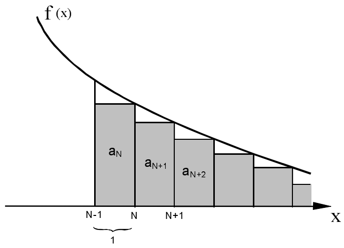
Exercício 6: Decida sobre a convergência ou não das séries abaixo, quando possível:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\, e^n}{n!}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$

Respostas: (a) converge (b) converge (c) diverge

10. Estimativa do erro pelo critério da integral

Se estamos lidando com uma série convergente com termos positivos e decrescentes, podemos estimar o erro usando uma integral, como mostra a figura ao lado.



Definimos uma função f(x) de modo que f(n) tenha a mesma forma funcional do termo geral da série. Para n inteiro, teremos $f(n) = a_n$. É necessário que $f(x) \geq f(n)$ para $x < n$ (há algumas séries malucas onde isso pode não acontecer).

Como o valor de a_n é exatamente igual à área do retângulo de altura a_n e base 1, então a soma das áreas dos retângulos a partir de N+1 é menor que o valor da área sob a função f(x) a partir de x = N. Ou seja, $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \int_N^{\infty} f(x)dx$.

Detalhando: ao aproximarmos a soma $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pela soma parcial $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, cometemos um erro $\varepsilon = |S - S_N| < \int_N^{\infty} f(x)dx$.

Exemplo 11 : Considere $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$. Para somar essa série com precisão de 0,01, escolhemos N de modo que

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{1}{x}\right|_{\infty}^{N} < 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N} > 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad N > 100$$

<u>NOTE</u> que, para séries com termos positivos, não se pode confiar apenas no valor do termo geral. Para a série acima, o termo geral fica menor que 0,01 para N > 10, mas é preciso somar 101 termos para obter o resultado correto com essa precisão. Veja a tabela abaixo:

N	$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$
10	1,550
20	1,596
30	1,612
101	1,635

11. Observações finais

Se nenhum dos critérios acima funcionar, é preciso empregar técnicas ou tabelas mais sofisticadas (veja por exemplo os livros indicados abaixo, ou procure resultados na Internet ou, ainda, utilize programas profissionais de manipulação matemática e cálculo numérico). Séries infinitas não podem ser somadas no computador – que sempre fornece uma soma parcial da série. Nesse caso, pode ser difícil estimar o erro de truncamento (uma soma parcial sempre dá um resultado finito, mesmo que a série não seja convergente). O ideal para problemas práticos é ter um resultado na forma de uma série alternada, porque nesse caso o erro de truncamento pode ser calculado facilmente.

REFERENCIAS

1. Swokowski, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed., volume 2. São Paulo: Makron, 1995. 2 v.
2. Kaplan, W. **Cálculo avançado**. São Paulo: E. Blücher, 1972-1987. 2 v.
3. Boulos, P. e Abud, Z.I. **Cálculo diferencial e integral** , volume 2. São Paulo: Makron, 2000.
4. Spiegel, M.R., **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. Coleção Schaum, São Paulo, McGraw Hill, 1977 ou mais recente.
5. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., ed. **Handbook of Mathematical Functions**. NY, Dover, 1965 ou mais recente.
6. Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. and Jeffrey, A.J.(ed.), **Table of Integrals, Series and Products**. NY, Academic Press, 1994.