Cálculo Aplicado à Engenharia Elétrica

2º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri

1ª Série de Exercícios

Números complexos

NÚMEROS COMPLEXOS - DEFINIÇÃO
O PLANO COMPLEXO
FORMAS RETANGULAR E POLAR

1. Esboce os seguintes números no plano complexo, e escreva cada um nas formas retangular e polar.
As respostas que não forem simples devem ser dadas com três significativos e com a fase em graus entre –180º e +180º.

(a) $z_1 = 2+j2$ (b) $z_2 = 3\angle 45^\circ$ (c) $z_3 = 2-j3$ (d) $z_4 = 5\angle -120^\circ$

(e) $z_5 = -2+j3$ (f) $z_6 = -2-j3$ (g) $z_7 = 3\angle 90^\circ$ (h) $z_8 = -4+j2$

(i) $z_9 = \pi - j\sqrt{2}$ (j) $z_{10} = -j$ (k) $z_{11} = 2$

Respostas:

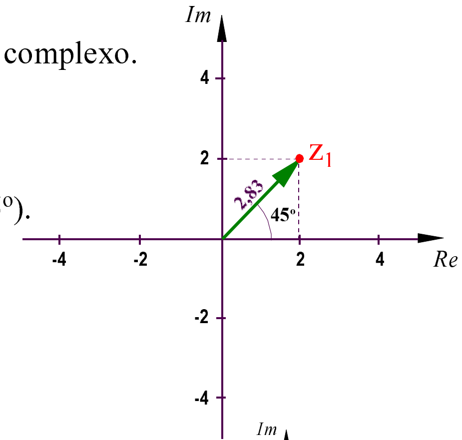
Note que o número complexo $z_1=2+j2$ corresponde ao ponto (2,2) no plano complexo.

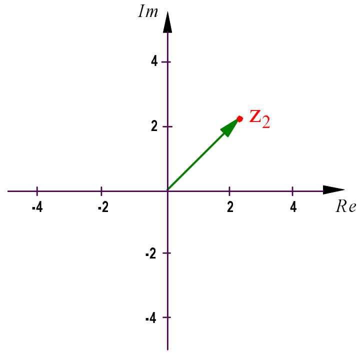
As suas partes real e imáginária são $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ e $\mathrm{Im}(z_1) = 2$.

Em coordenadas polares, esse ponto corresponde a $(2\sqrt{2}\,,\ 45^\circ) \cong (2{,}83\ ;\ 45^\circ)$.

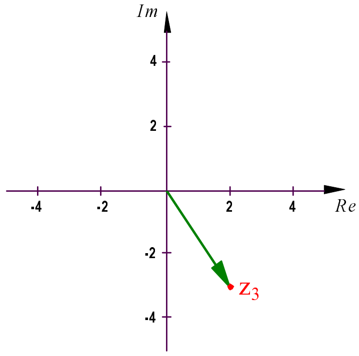
Escrevemos então que $2+j2 = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ$

O complexo z_1 pode ser associado ao vetor que liga a origem ao ponto z_1.

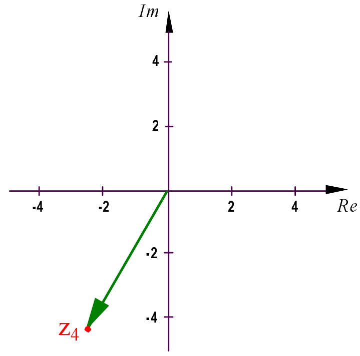




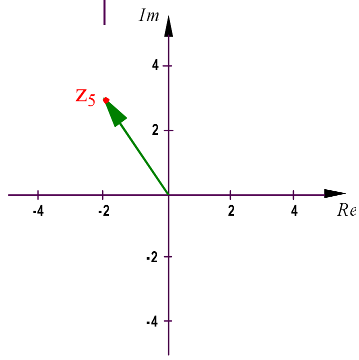
$z_2 = (3,\ 45^\circ) = 2{,}12 + j2{,}12$



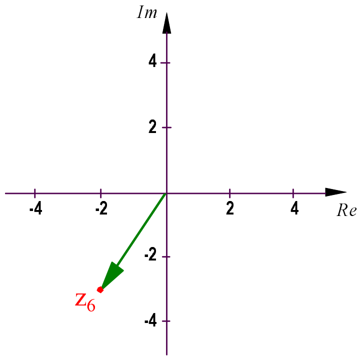
$z_3 = 2 - j3 = (3{,}61,\ -56^\circ)$



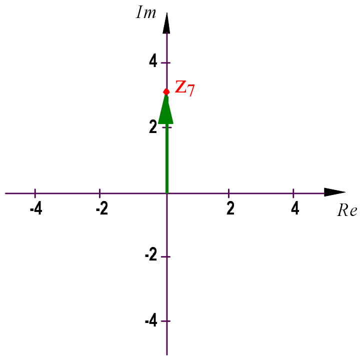
$z_4 = (5,\ -120^\circ) = -2{,}5 - j4{,}33$



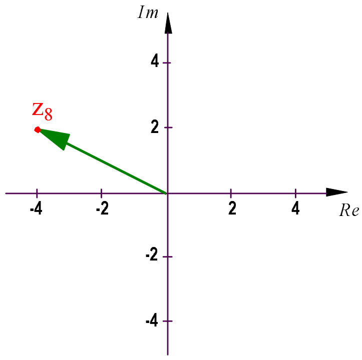
$z_5 = -2 + j3 = (3{,}61,\ 124^\circ)$



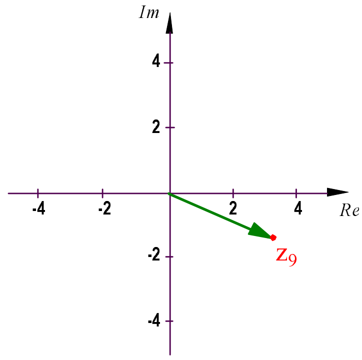
$z_6 = -2 - j3 = (3{,}61,\ -124^\circ)$



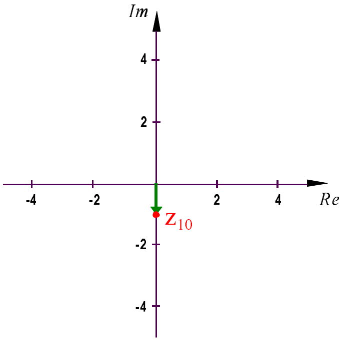
$z_7 = (3,\ 90^\circ) = 3j$

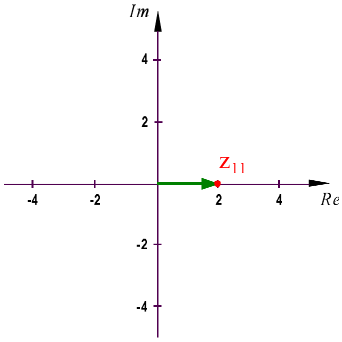


$z_8 = -4 + j2 = (4{,}47,\ 153^\circ)$



$z_9 = \pi - j\sqrt{2} = (3{,}45,\ -24^\circ)$





$z_{10} = -j = 1\underline{|-90^o}$ $z_{11} = 2 = 2\underline{|0^o}$

CONJUGAÇÃO

2. Repita o exercício **1** para cada um dos complexos conjugados de z_1 a z_{11}.

Respostas:

$\bar{z}_1 = 2 - j2 = 2{,}83\underline{|-45^o}$ $\bar{z}_2 = 3\underline{|-45^o} = 2{,}12 - j2{,}12$ $\bar{z}_3 = 2 + j3 = 3{,}61\underline{|56^o}$

$\bar{z}_4 = 5\underline{|120^o} = -2{,}5 + j4{,}33$ $\bar{z}_5 = -2 - j3 = 3{,}61\underline{|-124^o}$ $\bar{z}_6 = -2 + j3 = 6{,}61\underline{|124^o}$

$\bar{z}_7 = 3\underline{|-90^o} = -3j$ $\bar{z}_8 = -4 - j2 = 4{,}47\underline{|-153^o}$ $\bar{z}_9 = \pi + j\sqrt{2} = 3{,}45\underline{|24^o}$

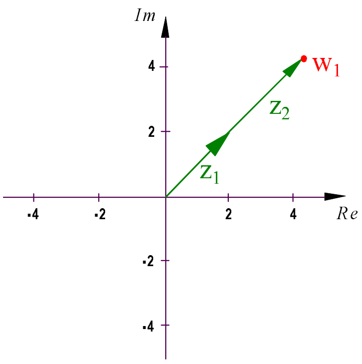
$\bar{z}_{10} = j = 1\underline{|90^o}$ $\bar{z}_{11} = 2 = 2\underline{|0^o}$

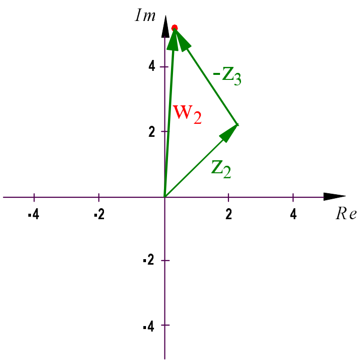
OPERAÇÕES

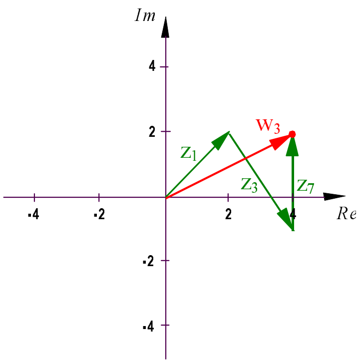
3. Efetue as operações pedidas, com os complexos citados no exercício 1. Escreva o resultado nas formas retangular e polar. Esboce a operação no plano complexo.

(a) $w_1 = z_1+z_2$ (b) $w_2 = z_2-z_3$ (c) $w_3 = z_1+z_3+z_7$
(d) $w_4 = 2z_1+z_5/2$ (e) $w_5 = -z_2+3z_7$ (f) $w_6 = z_2 + \bar{z}_2$
(g) $w_7 = z_2 - \bar{z}_2$ (h) $w_8 = z_3 + z_5 + \bar{z}_{10} + \bar{z}_{11}$ (i) $w_9 = z_2+z_4$

Respostas:







$w_1 = 4{,}12+j4{,}12 = 5{,}83\underline{|45^o}$ $w_2 = 0{,}12+j5{,}12 = 5{,}12\underline{|89^o}$ $w_3 = 4+j2 = 4{,}47\underline{|27^o}$

$w_4 = 3{,}00+j5{,}50 = 6{,}26\underline{|61^o}$ $w_5 = -2{,}12+j6{,}88 = 7{,}20\underline{|107^o}$ $w_6 = 4{,}24 = 4{,}24\underline{|0^o}$

$w_7 = 4{,}24j = 4{,}24\underline{|90^o}$ $w_8 = 2+j = 2{,}24\underline{|27^o}$ $w_9 = -0{,}38+j2{,}21 = 2{,}24\underline{|-100^o}$

4. Efetue as operações pedidas, com os complexos citados no exercício 1, trabalhando apenas na forma retangular.

(a) $u_1 = z_1.z_3$ (b) $w_1 = z_3.\overline{z}_3$ (c) $u_2 = z_1/z_3$ (d) $v_1 = z_6.z_8$ (e) $v_2 = z_6/z_8$
(f) $\xi_1 = z_1.z_{10}$ (g) $\xi_2 = 1/z_{10}$ (h) $w_2 = z_8/\overline{z}_8$ (i) $p = z_3^2$

Respostas:

$u_1 = (2+j2).(2-j3) = 4-j6+j4-j^2.6 = 4-j6+j4+6 = 10-j2$
$w_1 = (2-j3).(2+j3) = 2^2 + 3^2 = 13$

$$u_2 = \frac{2+j2}{2-j3} = \frac{(2+j2).(2+j3)}{(2-j3).(2+j3)} = \frac{4+j6+j4-6}{2^2+3^2} = \frac{-2+j10}{13} = -\frac{2}{13} + j\frac{10}{13} = -0{,}154 + j0{,}769$$

$v_1 = 14 + j8$ $v_2 = 0{,}1 + j0{,}8$ $\xi_1 = 2 - j2$ $\xi_2 = j$ $w_2 = 0{,}6 - j0{,}8$ $p = -5 - j12$

5. Mostre que as seguintes identidades são verdadeiras, utilizando os complexos na forma retangular ou polar, conforme mais conveniente:

(a) $\overline{w+v} = \overline{w} + \overline{v}$ (b) $\overline{w-v} = \overline{w} - \overline{v}$ (c) $\overline{w.v} = \overline{w}.\overline{v}$ (d) $\overline{w/v} = \overline{w}/\overline{v}$ (e) $\overline{w^2} = \overline{w}^2$

Procedimento:

Basta notar que:
na forma retangular, se $z = a + jb$ então $\overline{z} = a - jb$
na forma polar, se $z = M\angle\theta$, então $\overline{z} = M\angle-\theta$

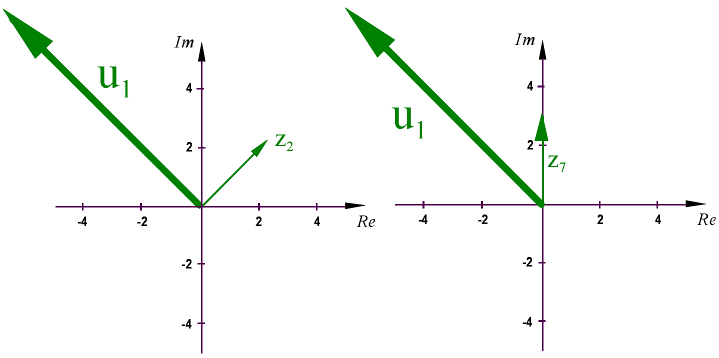
6. Efetue as operações pedidas, com os complexos citados no exercício 1, trabalhando apenas na forma polar. Esboce cada operação no plano complexo, interpretando as mesmas como rotações e dilatações.

(a) $u_1 = z_2.z_7$ (b) $u_2 = z_2/z_7$ (c) $v_1 = z_2.z_4$ (d) $v_2 = z_2/z_4$
(e) $\xi_1 = z_4.z_7$ (f) $m = z_4/z_7$ (f) $\xi_2 = 1/z_{10}$

Respostas:

$\mathbf{u_1 = z_2.z_7}$

$\mathbf{u_1 = 9\angle 135^\circ}$



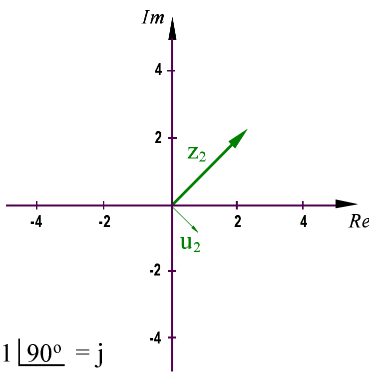
como $z_7 = 3\angle 90^\circ$, z_2 será girado de 90° no sentido anti-horário e multiplicado por 3.

ou então: $z_2 = 3\angle 45^\circ$, e z_7 será girado de 45° no sentido anti-horário e multiplicado por 3.

$\mathbf{u_2 = z_2/z_7}$

$\mathbf{u_2 = 1\angle -45^\circ}$

$z_7 = 3\angle 90^\circ$, então z_2 será girado de 90° no sentido horário e dividido por 3.



$v_1 = 15\angle -75^\circ$ $v_2 = 0{,}6\angle 165^\circ$ $\xi_1 = 15\angle -30^\circ$ $m = 1{,}67\angle 150^\circ$ $\xi_2 = 1\angle 90^\circ = j$

7. Efetue as operações pedidas. Escreva o resultado nas formas retangular e polar.

(a) $(2+j3)(2-j3)$ (b) $(-2-j3)(3+j2)+(-3+j4)$ (c) $5-j3+\dfrac{2+3j}{1-j}$

(d) $3\angle 45^\circ + 2\angle 120^\circ$ (e) $3\angle 45^\circ \times 2\angle 120^\circ$ (f) $\dfrac{3\angle 45^\circ}{2\angle 120^\circ}$ (g) $2\angle 30^\circ - 5\dfrac{8\angle 60^\circ + 10\angle -120^\circ}{4\angle 150^\circ}$

Respostas:

(a) 13 (b) $-3 - j9 = 9{,}49\angle -108^\circ$ (c) $4{,}5 - j0{,}5 = 4{,}53\angle -6^\circ$ (d) $1{,}12 + j3{,}85 = 4{,}01\angle 74^\circ$

(e) $-5{,}80 + j1{,}55 = 6{,}00\angle 165^\circ$ (f) $0{,}388 - j\,1{,}45 = 1{,}50\angle -75^\circ$ (g) $1{,}73 - j1{,}50 = 2{,}29\angle -41^\circ$

8. Efetue as operações pedidas, com os complexos citados no exercício 1. Escreva o resultado nas formas retangular e polar.

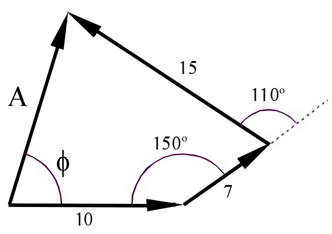
(a) $\dfrac{z_1 + z_2}{z_4 - z_8}$ (b) $\dfrac{z_2}{\overline{z}_7}$ (c) $\dfrac{z_1 . z_3}{z_5}$ (d) $\dfrac{z_2 . z_7}{z_4 . z_{10}}$

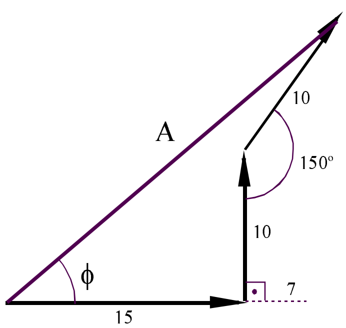
Respostas:

(a) $-0{,}470 + j0{,}763 = 0{,}896\angle 121^\circ$ (b) $-0{,}707 + j0{,}707 = 1{,}00\angle 135^\circ$

(c) $-2{,}00 - j2{,}00 = 2{,}83\angle -135^\circ$ (d) $1{,}74 - j\,0{,}466 = 1{,}80\angle -15^\circ$

9. Determine o vetor resultante nas somas abaixo, interpretando-os como números complexos. (encontre os valores de A e de ϕ).





Respostas:

$A = 13{,}9 \quad \phi = 71^\circ$ $A = 27{,}4 \quad \phi = 43^\circ$

POTÊNCIAS E RAÍZES DE EQUAÇÕES

10. Utilizando a identidade de Euler, determine todos os complexos distintos z tais que:

(a) $z^3 = 1$ (b) $z^4 = -1$ (c) $z^5 = -32$ (d) $z^2 = 15+j20$ (e) $z^3 = j$

Respostas:

(a) $1\angle 0^\circ = 1$
$1\angle 120^\circ = -0.500 + j0.866$
$1\angle 240^\circ = -0.500 - j0.866$

(b) $1\angle 45^\circ = 0,707 + j0,707$
$1\angle 135^\circ = -0,707 + j0,707$
$1\angle 225^\circ = -0,707 - j0,707$
$1\angle 315^\circ = 0,707 - j0,707$

(c) $2\angle 36^\circ = 1,62 + j1,18$
$2\angle 108^\circ = -0.618 + j1,902$
$2\angle 180^\circ = -2,00$
$2\angle 252^\circ = -0,618 - j1,902$
$2\angle 324^\circ = 1,62 - j1,18$

(d) $5\angle 27^\circ = 4,47 + j2,24$
$5\angle 207^\circ = -4,47 - j2,24$

(e) $1\angle 30^\circ = 0,866 + j0,500$
$1\angle 150^\circ = -0,866 + j0,500$
$1\angle 270^\circ = -j$

11. Determine o valor de w de modo que o complexo $(1-j)$ seja raiz de $f(z) = z^3-2z^2+4z+w$.

Resposta: $w = -2 + 2j$

FUNÇÕES EXPONENCIAIS, TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS

12. Mostre as seguintes identidades:

(a) $\mathrm{sen}(a + jb) = \mathrm{sen}(a).\cosh(b) + j\cos(a).\mathrm{senh}(b)$ (b) $\cos(a + jb) = \cos(a).\cosh(b) - j\mathrm{sen}(a).\mathrm{senh}(b)$
(c) $\mathrm{senh}(a + jb) = \mathrm{senh}(a).\cos(b) + j\cosh(a).\mathrm{sen}(b)$ (d) $\cosh(a + jb) = \cosh(a).\cos(b) + j\mathrm{senh}(a).\mathrm{sen}(b)$

Utilize as definições e as fórmulas:

$$\cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \qquad \mathrm{senh}(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \mathrm{sen}(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

13. Calcule os seguintes valores, escrevendo o resultado nas formas retangular e polar.

(a) e^{2j} (b) $-2e^{-1+0,2j}$ (c) $\mathrm{sen}(j)$ (d) $5\cos(1-0,5j)$ (e) $10\tan(-1+j)$

(f) $2\mathrm{senh}(j)$ (g) $-6\cosh(0,5-0,2j)$ (h) $\tanh(1-j)$

Respostas:

(a) $-0,416 + j0,909 = 1\angle 2 = 1 \;\; 115^\circ$ (b) $-0,721 - j0,146 = 0,736\angle 2,94 = 0,736\angle -169^\circ$

(c) $1,18j = 1,18\angle 90^\circ$ (d) $3,05 + j2,19 = 3,75\angle 36^\circ$ (e) $-2,72 + j10,8 = 11,2\angle 104^\circ$

(f) $1,68j = 1,68\angle 90^\circ$ (g) $-6,63 + j0,621 = 6,66\angle 175^\circ$ (h) $1,08 - j0,272 = 1,12\angle -14^\circ$

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

14. Obtenha um complexo z tal que:

(a) $e^z = -1$ (b) $e^z = 1+j$ (c) $e^z = 5$

É necessário lembrar que

(1) todo número complexo pode ser escrito na forma $Me^{j\theta}$

(2) se dois complexos $M_1e^{j\theta_1}$ e $M_2e^{j\theta_2}$ são iguais, onde $M_1 \geq 0$, $M_2 \geq 0$ e θ_1 e θ_2 são reais, então $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, onde $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$

Respostas:

(a) $z = j(\pi + 2k\pi)$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$

(b) $z = \ln\sqrt{2} + j\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$

(c) $\ln 5 + j2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$

15. Verifique que os complexos da forma $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + j\ln(2 \pm \sqrt{3})$, onde k é um número inteiro, satisfazem a equação sen(z) = 2.
