# MATEMÁTICA DISCRETA

*Prof. Maurício Fabbri*

## NOÇÕES DE LÓGICA FORMAL

*notas de aula, 30 de setembro de 2013*

*Na porta de minha casa passam dois ônibus, um A e outro B. Um deles passa pelo Ministério da Fazenda; o outro não. Na casa ao lado da minha, moram dois irmãos. Um só diz a verdade, outro só diz mentira. Ao indagar sobre qual ônibus tomar para chegar ao Ministério da Fazenda, um dos irmãos me disse "Se meu irmão estivesse aqui, mandaria você tomar o ônibus A". Que ônibus devo tomar?*

*Agradecimentos e bibliografia:*

[SLP] Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira http://www.ime.usp.br/~slago/
[ANC] Prof. Dr. Adalberto Nobiato Crespo http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=B186618
[CDT] Cláudio, D.M.; Diverio, T.A. e Toscani, L.V. "*Fundamentos de Matemática Computacional*", D.C.Luzzatto Ed., 1987.

A lógica formal é uma técnica composta por:

1. Uma *linguagem formal*: usada para representar conhecimento.
2. *Métodos de inferência*: usados para representar raciocínio.

**Exercício 1** [SLP]. Intuitivamente, qual dos dois argumentos a seguir é válido?

*Se neva, então faz frio. Está nevando. Logo, está fazendo frio.*
*Se chove, então a rua fica molhada. A rua está molhada. Logo, choveu.*

**Proposição** é uma sentença declarativa que pode ser verdadeira ou falsa, mas não as duas coisas ao mesmo tempo.

**Exercício 2** [SLP] [CDT]. Quais das sentenças a seguir são proposições?

a) *Abra a porta.*
b) *Excelente apresentação!*
c) *Esta semana tem oito dias.*
d) *Em que continente fica o Brasil?*
e) *Eu sou baiano.*
f) *O 383ésimo dígito na expansão decimal do número $\pi$ é 5.*
g) *Há um planeta em Andrômeda onde há vida inteligente.*

**Exercício 3** [SLP]. Por que a sentença "esta frase é falsa" não é uma proposição?

**Conectivo** são partículas (não, e, ou, se, então) que permitem construir sentenças complexas a partir de outras mais simples.

Exemplo [SLP]: A partir das sentenças (proposições atômicas):

*Está chovendo*
*A rua está molhada*

Podemos construir as sentenças (proposições compostas):

*Não está chovendo*
*Se está chovendo, então a rua está molhada*

## **Sintaxe**: define a estrutura das sentenças

*Símbolos*

Proposições: p, q, r, ...

Conectivos: ¬, ∧, ∨, → (da maior para a menor precedência)

*Fórmulas*

Todas as proposições são fórmulas.

Se α e β são fórmulas, então também são fórmulas:

¬α ("não" - negação)

α∧β ("e" - conjunção)

α∨β ("ou" - disjunção)

α→β ("se...então", condicional, implicação)

α↔β ("se, e somente se", bicondicional)

## **Semântica**: define o significado das sentenças

Interpretação: associação entre proposições e valores-verdade (V ou F)

Uma fórmula contendo n proposições admite $2^n$ interpretações distintas.

Tabela-verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível.

A proposição p∧q é verdadeira se ambas p e q forem verdadeiras e p∧q é falsa se uma das proposições p ou q forem falsas.

A proposição p∨q é verdadeira se uma das proposições p ou q forem verdadeiras e p∨q é falsa se as duas proposições p e q forem falsas.

A implicação p→q é a proposição que é falsa quando p é verdadeira e q é falsa e p→q é verdadeira nos outros casos.

Observação: na proposição p→q tem –se :

p: é a premissa (ou antecedente).

q: é a conclusão (ou conseqüente).

Algumas formas de expressar a proposição p→q são:

- Se ocorre p, então ocorre q.
- p implica q.
- p somente se q.
- p é suficiente para q.

Tabelas verdade:

| p | q | ¬p | p ∧ q | p ∨ q | p → q |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V | F |
| V | V | F | V | V | V |

*Discussão da implicação p→q*

A tabela verdade da implicação merece um comentário. Vamos exemplificar com um fato que obviamente decorre do outro:

se $x > 5$, então $x^2 > 25$ , ou seja, p→q onde p é a proposição $x > 5$ e q é a proposição $x^2 > 25$

se p é Verdadeira, então q também é.

se p é Falsa, p poderá ser Verdadeira ou Falsa (por exemplo, q será Falsa se x = 3, mas será Verdadeira se x = –6)

Só há uma maneira de mostrar que a implicação é falsa: mostrar que p pode ocorrer (ser Verdadeira) sem que ocorra q (q é Falsa). Somente nesse caso a implicação é Falsa.

A Ciência é tipicamente baseada em implicações, e por isso só sabemos, com certeza, quando uma coisa é errada. É bastante intrigante o fato de nunca sabermos com certeza de que uma coisa é Verdade! Por exemplo: uma força causa aceleração (F = ma). Ou seja, achamos que F → a. Até hoje, isso sempre foi verificado, mas é impossível provar que isso ocorre sempre, que é uma verdade absoluta. Pode ser que algum dia alguém aplique uma força que não cause aceleração. Por outro lado, sabemos com certeza de que o movimento não necessita de força, porque já observamos corpos que estão se movendo sem a presença de forças. Ou seja, sendo v a velocidade de um corpo, sabemos que a proposição ¬(v≠0 → F) é Verdadeira. Mas apenas acreditamos (com boas razões, mas não com certeza Divina!) que a proposição F ↔ a seja Verdadeira. Vai ficar como Verdadeira enquanto ninguém observar o contrário...

A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é a proposição que é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras ou se p e q são ambas falsas. Caso contrário, $p \leftrightarrow q$ é falsa.

Algumas formas de se escrever $p \leftrightarrow q$:

- p se, e somente se q.
- q se, e somente se p.
- p é equivalente a q.
- p é condição necessária e suficiente para q.

Duas proposições são equivalentes se e somente se elas tem a mesma tabela verdade.

**Exercício 4**. (a) Escreva a tabela verdade da proposição $p \leftrightarrow q$

(b) Mostre que a proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é equivalente a $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.
Isto é, $p \leftrightarrow q$ equivale a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

**Tautologia** é uma proposição composta que é sempre verdadeira.
**Contradição** é uma proposição composta que é sempre falsa.
**Contingência** é uma proposição composta que pode ser verdadeira ou falsa.

Exemplos:

| p | ¬p | p∨¬p |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | V |

Tautologia

| p | ¬p | p∧¬p |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |

Contradição

| p | ¬p | p→¬p |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | V |

Contingência

As proposições p e q são logicamente equivalentes se e só se a proposição $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. Escrevemos, nesse caso, $p \Leftrightarrow q$.

Uma maneira de mostrar que duas proposições são "equivalentes"é mostrar que a tabela verdade tem os mesmos resultados. Isso corresponde a mostrar que $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia.

**Exercício 5** [ANC]. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes. Verifique a tautologia correspondente.

(a) $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$

(b) $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$

(c) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$

Tautologia

| p | q | p∨q | ¬(p∨q) | ¬p | ¬q | ¬p∧¬q | ¬(p∨q)↔ ¬p∧¬q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | F | F | V |
| V | F | V | F | F | V | F | V |
| F | V | V | F | V | F | F | V |
| F | F | F | V | V | V | V | V |

São Equivalentes

Tautologia

| p | q | p→q | ¬p | ¬p∨q | (p→q)↔¬p∨q |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |

São Equivalentes

**Exercício 6**. Mostre que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia. Interprete em linguagem comum.

**Exercício 7** [SLP]. Classifique cada fórmula como Tautologia (válida), Contradição, ou Contingência. Observe as regras de precedência.

(a) $p \vee \neg p$
(b) $p \wedge \neg p$
(c) $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
(d) $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$
(e) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$
(f) $(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$
(g) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

**Exercício 8**. Em linguagem comum, um tanto erudita, costuma-se argumentar "ora, isso em que voce acredita é apenas uma contingência". O que queremos dizer com isso?

**Exercício 9** [ANC]. Mostre que a proposição "$x>5 \vee x<7$" é equivalente à proposição "$\neg(x\leq 5 \wedge x\geq 7)$".

Equivalências Notáveis [ANC]

| Equivalência | Nome |
|---|---|
| $p\wedge V\Leftrightarrow p$<br>$p\vee F\Leftrightarrow p$ | Lei da Identidade |
| $p\vee V\Leftrightarrow V$<br>$p\wedge F\Leftrightarrow F$ | Lei da Dominação |
| $p\vee p\Leftrightarrow p$<br>$p\wedge p\Leftrightarrow p$ | Lei Idempotente |
| $\neg(\neg p)\Leftrightarrow p$ | Lei da Dupla Negação |
| $p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$<br>$p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$ | Lei Comutativa |
| $(p\vee q)\vee r\Leftrightarrow p\vee(q\vee r)$<br>$(p\wedge q)\wedge r\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$ | Lei Associativa |
| $p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$<br>$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ | Lei Distributiva |
| $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q$<br>$\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$ | Lei de Morgan |

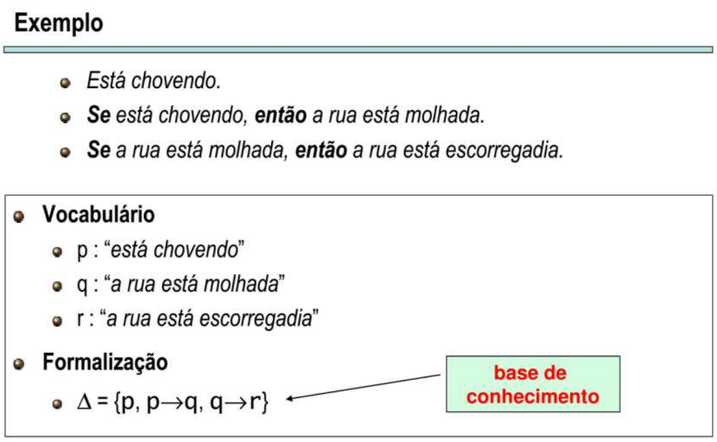
**Exercício 10** [ANC]. Verifique se são equivalentes as seguintes frases:
"Quem tem dinheiro, não compra fiado".
"Quem não tem dinheiro, compra fiado".

**Exercício 11** [ANC]. Verifique se $[\neg p\wedge(p\rightarrow q)] \rightarrow -q$ é uma tautologia.

**Exercício 12** [ANC]. Mostre que $p \leftrightarrow q$ e $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$ são equivalentes.

## Passos para formalização de sentenças [SLP]

Identificamos as palavras da sentença que correspondem a conectivos. Identificamos as partes da sentença que correspondem a proposições atômicas e associamos a cada uma delas um símbolo proposicional. Escrevemos a fórmula correspondente à sentença, substituindo suas proposições atômicas pelos respectivos símbolos proposicionais e seus conectivos lógicos pelos respectivos símbolos conectivos




**Exercício 13** [SLP]. Usando a sintaxe da lógica proposicional, formalize as sentenças

a) Se Ana é alta e magra, então ela é elegante.
b) Se Beto é rico, então ele não precisa de empréstimos.
c) Se Caio ama a natureza, então ele ama as plantas e os animais.
d) Se Denis jogar na loteria, então ele ficara rico ou desiludido.
e) Se faz frio ou chove, então Eva fica em casa e vê TV.