MATEMÁTICA DISCRETA

aulas a partir de 04/11/2013

Prof. Maurício Fabbri

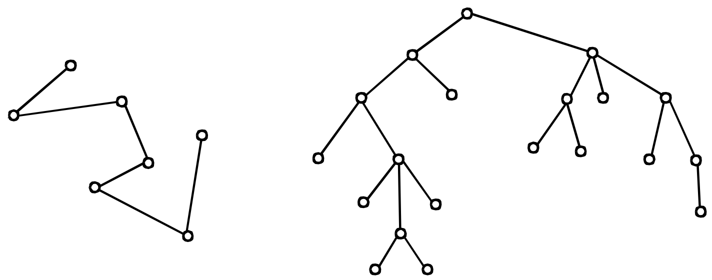
GRAFOS – parte II

Exercício 11[1]: Prove que, em uma sala com 51 pessoas, há pelo menos uma que conhece um número par de pessoas.

OBS.: zero é par.

ÁRVORES

É um grafo conexo acíclico. Podemos designar um vértice qualquer de uma árvore como sendo a raiz.



Lista de conceitos, fatos e teoremas

1. Pais e filhos
2. Raiz e folhas
3. Profundidade de um nó
4. Profundidade de uma árvore

Exercício 12: Desenhe árvores de 10 nós com profundidades 1, 2, 3, 4, 6, 9 e 10.

Exercício 13: Um *subgrafo* de G é obtido removendo uma ou mais arestas de G. Um subgrafo de G com o mesmo conjunto de nós que é uma árvore é chamado de *árvore geradora* de G. Desenhe duas árvores geradoras de K_5.

5. FATO: Uma árvore com N nós tem N–1 arestas.
6. TEOREMAS
   (a) Um grafo é uma árvore se e só se ele é conexo e a remoção de qualquer de suas arestas resulta num grafo desconexo.
   (b) Um grafo é uma árvore se e só se ele não contém nenhum ciclo e a adição de qualquer nova aresta cria um ciclo.
   (c) um grafo é uma árvore se e só se existe um único caminho conectando qualquer par de nós.

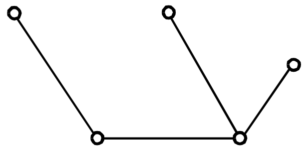
Exercício 14[2]: (árvores de decisão) Desenhe uma árvore mostrando todas as possibilidades ao se jogar uma moeda cinco vezes seguidas, de modo que não ocorra duas caras consecutivas.

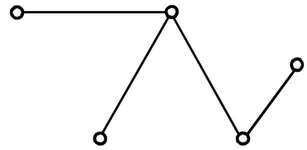
Exercício 15: Seja T_N o número de possibilidades que pode ocorrer no Exercício 14 quando se joga a moeda N vezes seguidas. Mostre que $T_N = T_{N-1} + T_{N-2}$, com $T_1 = 2$ e $T_2 = 3$. Confira o valor de T_5 com o número de folhas da árvore que voce construiu no Exercício 14. Quantas são as possibilidades se jogarmos a moeda oito vezes?

OBS.: Essa relação de recorrência define a sequencia de Fibonacci. Não é difícil obter uma fórmula direta para T_N.

ÁRVORES NÃO ROTULADAS

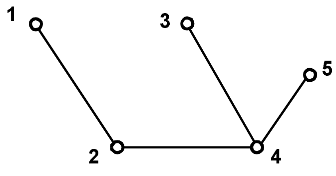
As duas árvores ao lado são isomorfas.
Topologicamente, são equivalentes.

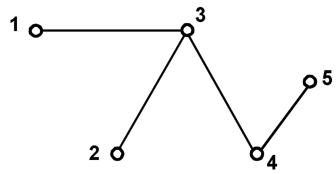




ÁRVORES ROTULADAS

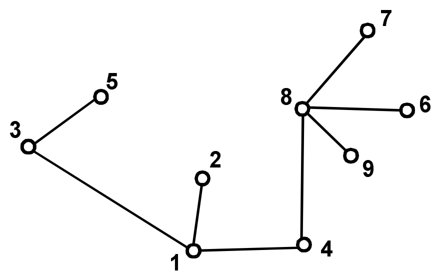
Se os vértices são rotulados, na prática podem representar duas árvores diferentes:





ARMAZENANDO ÁRVORES ROTULADAS

Os exemplos abaixo referem-se à árvore ao lado.



A matriz de adjacência *(serve para qualquer grafo)*

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	1	0	1	1	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Matriz esparsa (desperdício). É útil quando as arestas têm pesos.

Lista de adjacências *(serve para qualquer grafo)*

1 2 3 4
2 1
3 1 5
4 1 8
5 3
6 8
7 8
8 4 6 7 9
9 8

Lista de arestas *(serve para qualquer grafo)*

3	3	1	1	4	8	8	8
5	1	2	4	8	9	6	7

Código de pai *(para árvores)*

- escolha um nó como raiz
- liste cada aresta escrevendo o nó mais distante da raiz primeiro
- ordene a lista de arestas pelo rótulo

Escolhendo 1 como pai:

2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	3	8	8	4	8

NOTE: na primeira linha, obtemos cada rótulo exatamente uma vez, e o rótulo 1 não parece. Isso porque o número na 2^a linha é pai da 1^a, e cada nó só tem um pai; o 1 é raiz, e então não tem pai.

Código de Prüfer *(método ótimo, somente para árvores)*

O código estendido de Prüfer:

- numere os rótulos de 1 a N, e escolha o nó 1 como raiz.
- procure por um nó de grau 1, diferente da raiz, com o menor rótulo. Escreva a aresta com essa extremidade (escreva o nó mais distante primeiro), e remova esse nó e essa aresta da árvore.
- repita o passo anterior até que todas as arestas sejam listadas.

2	5	3	6	7	9	8	4
1	3	1	8	8	8	4	1

O código de Prüfer:

FATO (Lema): A segunda linha do código de Prüfer determina a primeira. E não é preciso listar a ultima aresta.

A árvore é determinada pela sequencia 1 3 1 8 8 8 4

Para reconstruir a primeira linha, basta saber que a árvore tem N=9 nós.

Os rótulos possíveis são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Vamos examinar como saber qual o número A:

A						
1	3	1	8	8	8	4

esse número não pode ser 1, 3, 8 ou 4, porque ele foi removido depois de listado. Ele deve ser o menor número que não aparece mais na segunda linha; portanto, A = 2.

2	X					
1	3	1	8	8	8	4

o número X deve ser o menor número entre 2 e N que ainda não apareceu na primeira linha, e que não aparece na segunda linha a partir da posição de X. Vemos que X=5.

Exercício 16: Termine a reconstrução da lista de arestas. Note que a última aresta sempre terá 1 como pai.

A reconstrução recupera todas as arestas:

2	5	3	6	7	9	8	4
1	3	1	8	8	8	4	1

TEOREMA: Toda sequencia de números entre 1 e N, de comprimento (N–2), é um código de Prüfer de alguma árvore sobre N nós.

Exercício 17: Desenhe a árvore correspondente aos códigos de Prüfer abaixo:

(a) 2 3 3 4 5 6 5
(b) 4 2 3 5 5 6 5 2 4

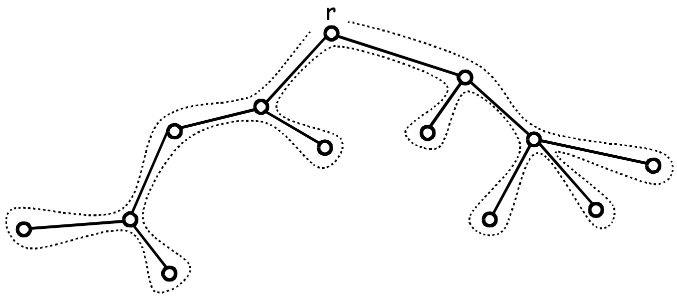
CONSEQUENCIA: TEOREMA DE CAYLEY: O número de árvores rotuladas com N nós é N^{N-2}.

Exercício 18: Qual o número de árvores diferentes, rotuladas, com 8 nós?

CODIFICANDO E CONTANDO ÁRVORES NÃO ROTULADAS

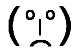
O código planar:

Imagine cada aresta como uma parede perpendicular ao plano do papel. Saindo da raiz, caminhe ao redor dessa parede mantendo-a à sua direita. Cada vez que caminhar para longe da raiz (de pai para filho), escreva 1; se caminhar para perto da raiz (de filho para pai), escreva 0.



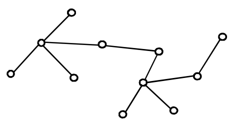
1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0

esse caminho tem 2(N–1) passos.

Nem toda sequencia binária de comprimento 2(N–1) representa uma árvore. 

TEOREMA: O número T_n de árvores não rotuladas com n nós satisfaz $\dfrac{n^{n-2}}{n!} \leq T_n \leq 4^{n-1}$.

Para $n > 30$, teremos $2^n \leq T_n \leq 4^n$.

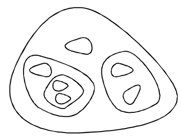
Exercício 19: (a) Escreva o código planar da árvore 

(b) Verifique se existe uma árvore com o código planar 1011100010101001

(c) Estime o número de árvores não rotuladas, diferentes, com 7 nós.

Exercício 20[3]: Use uma árvore para encontrar a maior sequencia crescente de números na lista 5, 11, 6, 1, 3, 9, 10, 4.

Exercício 21[3]: Desenhe uma árvore que represente a relação entre as regiões representadas ao lado.



Exercício 22[3]: Desenhe uma árvore que represente os parêntesis aninhados ((( )( )) ((( ) ( )) ( ))) .

Exercício 23: Escreva as operações seguintes em notação RPN. Em seguida, desenhe uma árvore para representar cada passo.

(a) $(9-6)\times 2+7\div 3$

(b) $\dfrac{2+7(5-3)}{8+9}$

Exercício 24: Represente as possibilidades durante um jogo da velha comum através de uma árvore. Represente apenas possibilidades que não sejam equivalentes.

Bibliografia:

1. Lovász, L; Pelokán, J. e Vesztergombi, K. "*Matemática Discreta*". SBM, RJ, 2013.
2. Gersting, J. L. "*Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*", 4a ed., LTC, RJ, 2001.
3. Wilson, R.J. and Watkins, J.J. "*Graphs: an introductory approach*", Wiley, NY, 1990.