

GRAFOS

Lista de conceitos e exercícios

1. DEFINIÇÃO

$G(V, A, g)$

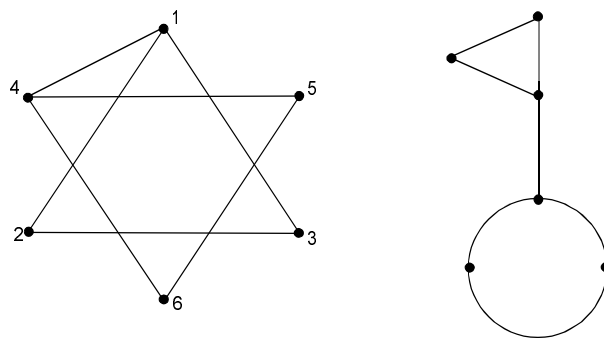
V = conjunto não vazio de *nós* (*vértices*)

A = conjunto de *arcos* (*arestas*)

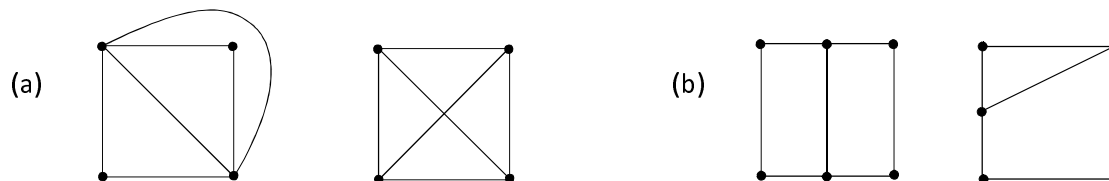
g = função que associa cada arco a um par de vértices

2. Grafo dirigido, orientado ou dígrafo
3. Grafo com pesos
4. Laços
5. Arcos paralelos
6. Grafo simples: sem laços nem arcos paralelos
7. Vértices adjacentes
8. Caminho
9. Grafo conexo, ou conectado
10. Nó isolado
11. Circuito
12. Ciclo; comprimento de um ciclo
13. Grafos acíclicos
14. Grau de um vértice
em grafos orientados:
 grau de entrada
 grau de saída
 fontes
 sumidouros
15. LEMA: em qualquer grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arcos (*porque cada arco contribui exatamente 2 na soma dos graus*).
 Consequências:
 - a. em qualquer grafo, a soma dos graus de todos os vértices é par
 - b. em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par
 - c. se o grafo é regular de grau r e tem n vértices, ele tem exatamente $\frac{1}{2}nr$ arcos
16. Grafo regular: todos os vértices tem o mesmo grau
17. Grafo completo: todos os pares de vértices estão conectados. Notação: K_n
18. Subgrafo $G_1(V_1, A_1, g)$ é subgrafo de $G(V, A, g)$ se e só se $V_1 \subseteq V$ e $A_1 \subseteq A$
 G_1 é obtido de G retirando alguns vértices e/ou arcos de G
19. Grafo bipartido ($V = V_1 \cup V_2$ com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ de modo que todo arco de G une um vértice de V_1 com um de V_2).
20. Grafo bipartido completo (GBC). Notação: $K_{n,m}$
21. Grafos isomorfos

Exercício 1: Os dois grafos ao lado são isomorfos.
 Numere os vértices dos dois com os mesmos rótulos.



Exercício 2: Por que os pares de grafos abaixo não são isomorfos?



22. Grafos planares (*podem ser desenhados no plano, sem que os arcos se cruzem*)

Exercício 3: Verifique que TODOS os grafos que aparecem nos Exercícios 1 e 2 são planares.

23. Fórmula de Euler e consequências

Se a representação planar de um grafo planar com n vértices e a arcos divide o plano em r regiões, então

$$n - a + r = 2$$

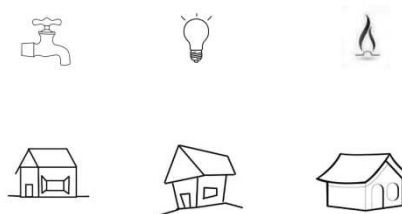
Se, além disso, o grafo é simples e conexo, então

- se $n \geq 3$ então $a \leq 3n - 6$
- se $n \geq 3$ e não há ciclos de comprimento 3, então $a \leq 2n - 4$

Exercício 4: Verifique a fórmula de Euler para os grafos dos Exercícios 1 e 2.

Exercício 5: Verifique se K_5 é planar.

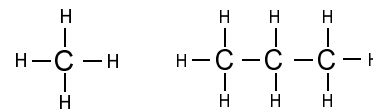
Exercício 6: ($K_{3,3}$) Três casas devem receber água, luz e gás, diretamente das fontes.
 Verifique se isso pode ser representado por um grafo planar.



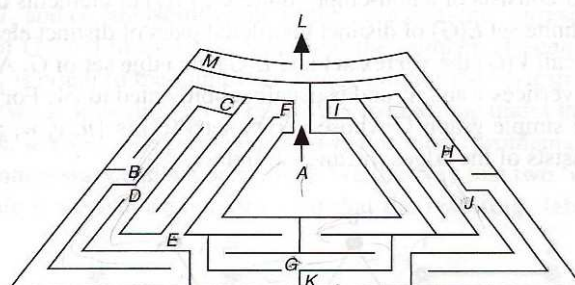
Exercício 7 ^[4]: Ao lado temos as fórmulas estruturais do metano (CH_4) e do propano (C_3H_8).

Observe a ordem dos vértices C e H.

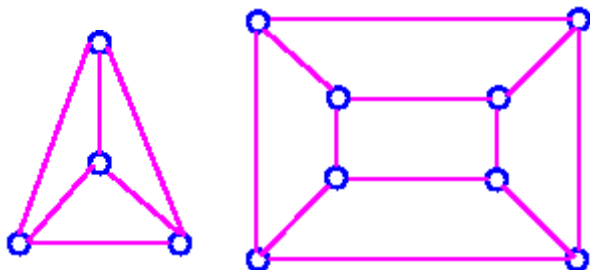
Existem dois compostos diferentes com a fórmula C_4H_{10} . Quais são eles?
 (*analise o problema apenas do ponto de vista de grafos planos*)



Exercício 8 ^[4]: Desenhe um grafo com vértices A, B, ..., M, mostrando os vários caminhos que se pode pegar ao percorrer o labirinto do palácio Hampton Court.

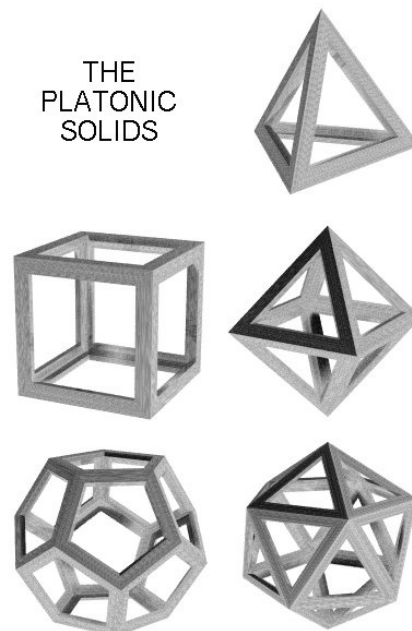


Exercício 9: Os sólidos platônicos, que tem como faces polígonos regulares, são exatamente cinco - tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Eles podem ser representados por grafos planares regulares. Abaixo temos a representação do tetraedro e do cubo. Desenhe o grafo correspondente ao octaedro.



<http://www.personal.kent.edu/~rnuhomo/GraphTheory/MyGraphTheory/deEx.htm>

THE
PLATONIC
SOLIDS



<http://timberwolfe.com/wp-content/uploads/2009/09/platonic.jpg>

Exercício 10: Temos abaixo uma tabela de conexões diretas entre cidades da região de Baurú. Os números são as distâncias em quilômetros entre cidades vizinhas.

	Baurú	Piratininga	Agudos	Pederneiras	Avai	Boracéia	Macatuba	Jaú	Bariri	Lençóis	Bocaina	Mineiros	Barra Bonita	Monte Alegre	2 Córregos
Baurú		20	20	38	39	46									
Piratininga	20		27	44											
Agudos	20	27		45						32					
Pederneiras	38	44	45			21	20	26							
Avai	39														
Boracéia	46			21					17						
Macatuba				20						17					
Jaú				26					36		25	26	26		
Bariri						17		36			50				
Lençóis			32				17							16	
Bocaina								25	50						
Mineiros								26					16		10
Barra Bonita								26				16			
Monte Alegre										16					
2 Córregos												10			

- (a) represente essa tabela por um gráfico planar
 (b) encontre rotas de Monte Alegre para Boracéia. Qual a menor rota?

Bibliografia:

1. Crespo, A. N "*Introdução à Teoria dos Grafos*". Apostila USF, 2012.
2. Gersting, J. L. "*Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*", 4a ed., LTC, RJ, 2001.
3. Boaventura Netto, P.O. e Jurkiewicz, S. "*Grafos: Introdução e Prática*", Edgard Blucher, SP, 2009.
4. Wilson, R.J. "*Graph Theory*", 4th ed., Prentice Hall, Harlow UK, 1996.
5. Wilson, R.J. and Watkins, J.J. "*Graphs: an introductory approach*", Wiley, NY, 1990.