MATEMÁTICA DISCRETA

Prof. Maurício Fabbri

CONJUNTOS, RECORRÊNCIA E INDUÇÃO

notas de aula, agosto de 2013

NOTAÇÃO *(sintaxe)*

Exemplo: $\mathbb{A} = \{ a, b, c \}$

I. Em um conjunto, é irrelevante marcar elementos repetidos.

Assim, $\{ a, b, c \}$ é o mesmo conjunto que $\{ a, b, c , b\}$: $\{ a, b, c \} = \{ a, b, c , b \}$

II. se α é um elemento do conjunto $\mathbb{A}$, escrevemos $\alpha \in \mathbb{A}$ (α *pertence* a $\mathbb{A}$)

III. $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{A} \Rightarrow a \in \mathbb{B}$ ($\mathbb{A}$ está contido em $\mathbb{B}$; $\mathbb{A}$ é um subconjunto de $\mathbb{B}$)

Todo conjunto contém o conjunto vazio ϕ. ($\phi \subseteq \mathbb{A}, \forall \mathbb{A}$)

Todo conjunto está contido em si mesmo. ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}, \forall \mathbb{A}$)

IV. $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{ a \mid a \in \mathbb{A} \vee a \in \mathbb{B} \}$ (união)

V. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{ a \mid a \in \mathbb{A} \wedge a \in \mathbb{B} \}$ (intersecção)

VI. $\mathbb{A} - \mathbb{B} = \{ a \mid a \in \mathbb{A} \wedge a \notin \mathbb{B} \}$ (diferença, ou complemento de $\mathbb{B}$ em relação a $\mathbb{A}$)

VII. $\mathbb{S} = \{ \mathbb{B} \mid \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A} \}$ é o conjunto dos subconjuntos de A

<u>Exercício 1</u>: Dê exemplos, usando diagramas de Venn, onde

(a) $\mathbb{A} - \mathbb{B} = \mathbb{A}$
(b) $\mathbb{A} - \mathbb{B} \neq \mathbb{A}$
(c) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B}$
(d) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \mathbb{B}$

<u>Exercício 2</u>: Liste todos os subconjuntos de $\mathbb{A} = \{ \alpha, \beta, \delta \}$

VIII. CARDINALIDADE: para conjuntos finitos, é o número de elementos.

Notação: $|\mathbb{A}|$ = numero de elementos de $\mathbb{A}$

Exemplos: $| \{ 1, 37, x, \gamma, \text{amarelo} \} | = 5$

$| \{ x \in \mathbb{N} \mid 12 < x < 23\} | = 11$, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais

$|\{a \mid a \in \mathbb{A}\}|$ é o número de elementos de $\mathbb{A}$

$| \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}\}|$ é o número de subconjuntos de $\mathbb{B}$

$| \mathbb{A} \mid \mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} |$ não está definido: depende do conjunto $\mathbb{A}$ que se escolhe

O PROCESSO DE INDUÇÃO

Uma propriedade p(n) que depende do número natural n pode ser investigada por indução. A forma mais simples de uma demonstração por indução é:

(1) Verifique se p(1) é verdadeira
(2) Suponha que p(n) seja verdadeira
(3) Usando (1) e (2), verifique se p(n+1) é verdadeira. Se for, então p(n) vale para todo $n \geq 1$.

Exemplo: Vamos demonstrar que o número de subconjuntos de $\mathbb{A}$ é $2^{|\mathbb{A}|}$

Em primeiro lugar, observamos que

$$|\{ \mathbb{S} \mid \mathbb{S} \subseteq \mathbb{A} \wedge m \in \mathbb{A} \wedge m \in \mathbb{S} \}| = |\{ \mathbb{S} \mid \mathbb{S} \subseteq \mathbb{A} \wedge m \in \mathbb{A} \wedge m \notin \mathbb{S} \}|$$

Exercício 3: Descreva a igualdade acima em palavras, justificando sua veracidade.

Agora procedemos por indução. Seja $n = |\mathbb{A}|$.

(1) A propriedade vale para n=0 e n=1. Isto é fácil de ver:

- se n = 0, o conjunto é vazio e temos um único subconjunto: ele mesmo. $2^0 = 1$.
- se n = 1, o conjunto tem um único elemento e, portanto, dois subconjuntos (vazio e ele mesmo). $2^1 = 2$.

(2) Suponhamos que a propriedade vale para n > 1, ou seja, $\mathbb{A}$ tem $2^{|\mathbb{A}|} = 2^n$ subconjuntos.

(3) Agora vamos mostrar que, se vale para n, vale também para n+1. Ou seja, queremos mostrar que, se $|\mathbb{A}| = n+1$, então ele tem 2^{n+1} subconjuntos.

Ora, se o conjunto $\mathbb{A}$ tem mais de um elemento, escolha um destes elementos (digamos, m) e divida todos os subconjuntos de $\mathbb{A}$ em duas categorias disjuntas:
(*subconjuntos que contem o elemento m*) e os (*subconjuntos que não contém o elemento m*)

Mas vimos acima que
|*subconjuntos que contem o elemento m*| = |*subconjuntos que não contém o elemento m*|

Assim, o número de subconjuntos de $\mathbb{A}$ será $2\times$|*subconjuntos que não contém o elemento m*|.
Mas, por hipótese, |*subconjuntos que não contém o elemento m*| = 2^n, já que esses subconjuntos tem n elementos.
E então teremos |subconjuntos de $\mathbb{A}$| = $2\times 2^n = 2^{n+1}$
A propriedade vale para n+1, e então vale para todo n, como queríamos demonstrar (c.q.d.)

OBS.: Claramente, esse longo discurso poderia ser abreviado notando que, se acrescentarmos um elemento a um conjunto $\mathbb{A}$, o número de subconjuntos de $\mathbb{A}$ dobra.

Exercício 4: Mostre, por indução, que

(a) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$
(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(c) $n < 2^n$

MANIPULAÇÃO DE SOMAS

Exercício 5: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. *Demonstração: use o truque de Gauss.*

Exercício 6: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$. *Demonstração: some cada termo em separado e simplifique.*

Exercício 7: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Demonstração: vamos usar uma técnica um tanto complicada, porém muito instrutiva.

Observemos que $S = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} k$

Exercício 8: Mostre a igualdade acima.

Agora lembramos que $\sum_{k=j}^{n} k = \frac{(j+n)(n-j+1)}{2}$

Exercício 9: Mostre a igualdade acima. Use o truque de Gauss.

Finalmente, basta desenvolver $S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (j+n)(n-j+1)$.

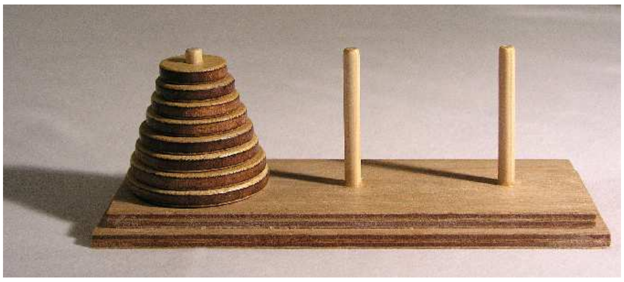
Exercício 10: Desenvolva a soma acima, termo a termo, e obtenha uma equação para S. Resolva essa equação e encontre S.

RECORRÊNCIA

Exemplo: A torre de Hanói

Trata-se de mover todos os discos para o pino da direita, com as regras:

1 – move-se apenas um disco de cada vez
2 – um disco maior nunca pode ficar sobre um disco menor



http://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanói

Desejamos saber em quantos movimentos, no mínimo, podemos executar a tarefa.

A solução mais elegante é por recorrência. Seja T_n o número de movimentos necessário quando a torre for de n discos.

Note que, para mover dois discos, bastam três movimentos: $T_2 = 3$.

Para transportar (n+1) discos, transporta-se os n primeiros (gastando T_n movimentos) para o pino central, coloca-se o disco (n+1) no pino da direita (1 movimento) e então se transporta os n discos do pino central para o pino da direita (gastando mais T_n movimentos). Portanto,

$$\begin{cases} T_{n+1} = 2T_n + 1 \quad para\ n\ >\ 3 \\ T_2 = 3 \end{cases}$$

Essa relação de recorrência, junto com a condição inicial, determina os T_n.

Exercício 11: Mostre, por indução, que $T_n = 2^n - 1$.

Exercício 12: Deduza diretamente o valor de T_n, da seguinte maneira:

- somando 1 a ambos os lados da relação de recorrência, teremos $\begin{cases} T_{n+1} + 1 = 2T_n + 2 = 2(T_n + 1) \\ T_2 + 1 = 4 \end{cases}$

- defina $U_n = T_n + 1$. Então temos que $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n \\ U_2 = 4 \end{cases}$. Agora fica fácil saber quem são os U_n, e daí, os T_n.

Exercício 13: Mostre, por indução, que qualquer postagem maior ou igual a 12 reais pode ser feita apenas com selos de 4 e 5 reais. *(é fácil mostrar isso diretamente, também)*

Referências:

1. Graham, R.L.; Knuth, D.E.; Patashnik, O.: *Matemática Concreta*. 2ª ed, LTC, RJ, 1995.
2. Menezes, P.B.: *Matemática Discreta para Computação e Informática*, 4ª ed., Bookman, Porto Alegre, 2013.
3. Lima, E.L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E.; Morgado, A.C.: *A Matemática do Ensino Médio*, 6ª ed., V1 e V2, SBM editora, RJ, 2006.
