FENOMENOS DE TRANSPORTE

2º Semestre de 2013

Prof. Maurício Fabbri

3ª SÉRIE DE EXERCÍCIOS

Transporte de calor por convecção
O transiente exponencial simples
Conservação da energia

1. O coeficiente de transferência de calor

Leia o material sobre convecção e transporte de calor apresentado nas transparências em aula.

Exercício 1: A temperatura no interior de um quarto é de 25ºC. Há uma única janela de vidro, de 80×45cm, e lá fora está fazendo 10ºC. Supondo que está ventando muito, de modo que o coeficiente de transferência de calor pela janela é de $80 W/m^2.^oC$, qual a taxa de transferência (potência) com que o calor sai do quarto pela janela? *(resposta com dois significativos)*

Resposta: 0,43kW

Na verdade, à medida que o calor sai pela janela, a temperatura do quarto diminui, e diminui também a taxa de transferência de calor (o calor é perdido cada vez mais lentamente). Também precisaríamos considerar se há pessoas dentro do quarto, ou alguma coisa que produza calor.

Exercício 2: Suponha que a potência térmica em Watts liberada por uma pessoa para o ambiente seja dada por $P=8(37-T_a)$, onde T_a é a temperatura ambiente em ^oC. Suponha que, no exercício 1, há três pessoas dentro do quarto. Suponha ainda que, em cada instante, a temperatura dentro do quarto seja uniforme. Qual será a temperatura de equilíbrio, no quarto?

Resposta: 22,3ºC

Em um grande número de casos práticos, o equilíbrio é atingido exponencialmente, porque a taxa de transferência é proporcional à diferença de temperaturas, e essa diferença vai diminuindo com o tempo.

REVISÃO

O NÚMERO *e*

$$e = 2{,}718281828459045235360287... = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$$

e é o "número de Neper", ou a "base dos logaritmos naturais ou neperianos"
e é um número transcendental (não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais)
(*outro número transcendental conhecido é o* π)

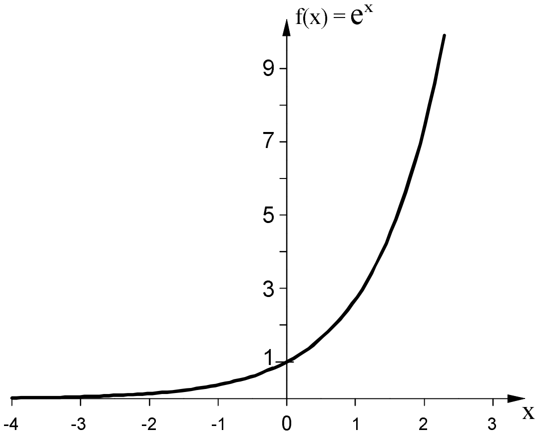
Exercício 3: Obtenha com a calculadora os números seguintes, expressando o resultado com *quatro significativos*:

(a) $e =$ (b) $e^{-1} =$ (c) $e^2 =$ (d) $e^{-2} =$ (e) $e^3 =$ (f) $e^{-3} =$
(g) $e^{1/4} =$ (h) $e^{-1/4} =$ (i) $e^0 =$
(j) $e^{20} =$ (k) $e^{-20} =$ (l) $e^{\sqrt{2}} =$ (m) $e^{-\sqrt{2}/5} =$

Resp.: (a) 2,718 (b) 0,3679 (c) 7,389 (d) 0,1353 (e) 20,09 (f) 0,04979 (g) 1,284 (h) 0,7788 (i) 1,000 (j) $4{,}852\times10^8$ (k) $2{,}061\times10^{-9}$ (l) 4,113 (m) 0,7536

A FUNÇÃO EXPONENCIAL

$f(x) = e^x$ tem as seguintes propriedades importantes:

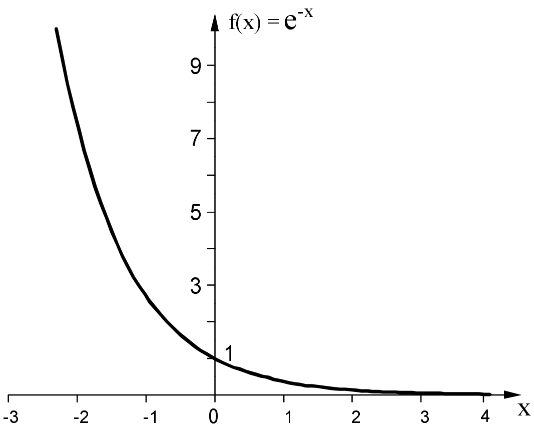


- é sempre crescente
- $f(x) > 0$ para todo x
- $f(0)=1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \infty$
- f(x) "*cresce mais rápido*" que qualquer potência de x, para x suficientemente grande:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$, para qualquer n.

- A função e^x é a única cuja derivada é ela mesma (a taxa de variação de e^x é e^x !!!) : $\boxed{\dfrac{d}{dx}e^x = e^x}$

$f(x) = e^{-x}$ tem as seguintes propriedades importantes:



- é sempre decrescente
- $f(x) > 0$ para todo x
- $f(0)=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
- e^{-x} "*é capaz de matar*" qualquer potência de x, para x suficientemente grande:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$, para qualquer n.

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x}}$$

<u>Exercício 4</u>: Escreva cada uma das seguintes funções como uma única exponencial:

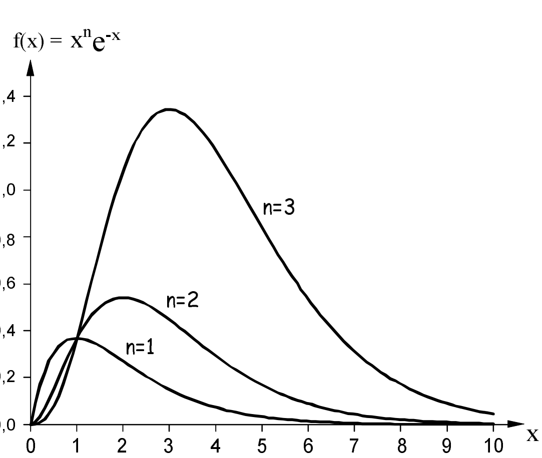
(a) $f(x) = e^x.e^{2x}$ (b) $g(x)=e^{2x}.e^{-x/3}$ (c) $h(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{5x}}$ (d) $m(x) = \dfrac{e^{5x/2}}{e^{-x}}$

Resp.: (a) $f(x)=e^{3x}$ (b) $g(x)=e^{5x/3}$ (c) $h(x)=e^{-2x}$ (d) $m(x)=e^{7x/2}$

A figura ao lado mostra como a exponencial decrescente "*mata*" o crescimento de x^n, para n=1,2 e 3.

<u>Exercício 5</u>: Utilize a derivada de $f(x)=x^n e^{-x}$ para determinar precisamente a localização de cada um dos pontos de máximo nos gráficos ao lado.

Resp.: $f(x) = x^n e^{-x}$ tem máximo em $x = n$, com valor $f(n) = n^n e^{-n}$.
xe^{-x} tem máximo em (1 ; 0,37); x^2e^{-x} tem máximo em (2 ; 0,54); x^3e^{-x} tem máximo em (3 ; 1,34)



A derivada de $f(x) = e^{\alpha x}$ é $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$. ($\alpha$ sendo um parâmetro que não depende de x)

A FUNÇÃO EXPONENCIAL - forma geral

Uma função exponencial decrescente é comumente escrita como $f(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$,
onde a constante positiva τ é chamada de *constante de tempo*.
A é o valor inicial da exponencial (em t=0).
Um critério prático muito utilizado é que a exponencial "morre" após três constantes de tempo, ou seja, para $t > 3\tau$. Confira na calculadora a tabela abaixo:

T	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ	7τ	8τ	9τ	10τ
$e^{-t/\tau}$	0,368	0,135	0,0497	0,0183	0,00674	0,00248	0,000912	0,000335	0,000123	$< 10^{-4}$

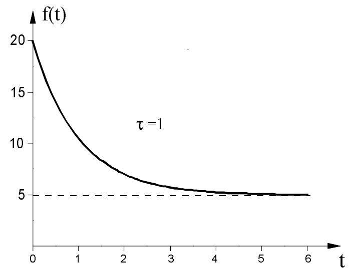
Uma exponencial decrescente pode expressar um "transiente", isto é, uma grandeza que varia com o tempo a partir de um valor inicial e tende a um valor de "regime", ou de "equilíbrio".

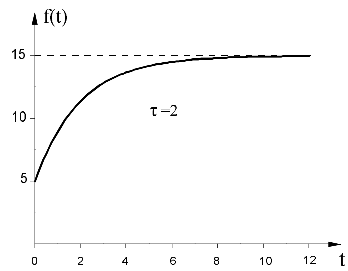
Se I é o valor inicial, F é o valor final e τ é a constante de tempo, um regime transiente exponencial pode ser escrito como:

$$f(t) = F + (I - F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Note que f(0)=I, f(∞)=F e o tempo que o transiente dura é da ordem de 3τ.

Exemplos:





Exercício 6: (a) Escreva a fórmula de cada um dos dois transientes ilustrados na figura acima.
(b) Calcule a taxa de variação inicial de f(t) para cada um dos dois transientes ilustrados na figura acima.

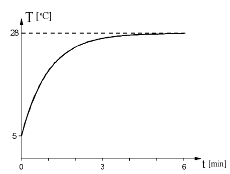
Resp.: (a) $f(t) = 5+15e^{-t}$ *e* $f(t) = 15-10e^{-t/2}$ *(b)* -15 *e* 5

Exercício 7: Um copo de água é retirado da geladeira a 5^oC, e esquenta gradualmente até chegar à temperatura ambiente, de acordo com:

$$T(t) = 28 - 23e^{-t} \qquad \begin{cases} \text{t em minutos} \\ \text{T em } ^oC \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico T *versus* t.
(b) Qual o valor da temperatura ambiente?
(c) Qual a taxa de aquecimento, em ^oC/min, no instante inicial? após vinte segundos? após dois minutos? quando a temperatura da água for 26^oC?

Resp.:



(b) $T_{ambiente} = T(\infty) = 28^oC$
(c) $T'(0) = 23^oC/min$
$T'(20s) = 16{,}5^oC/min$
$T'(2min) = 3{,}11^oC/min$

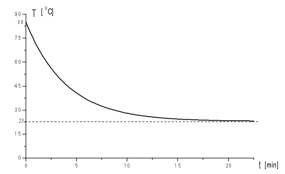
$T' = 28\text{-}T \Rightarrow 2^oC/min$

Exercício 8: Um copo de água, retirado do microondas, esfria gradualmente até chegar à temperatura ambiente, de acordo com:

$$T(t) = 23 + 62e^{-t/4} \qquad \begin{cases} \text{t em minutos} \\ \text{T em } ^{o}\text{C} \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico T *versus* t.
(b) Qual o valor da temperatura inicial? Da temperatura ambiente?
(c) Qual a taxa de resfriamento, em ^{o}C/min, no instante inicial? após dois minutos? após dez minutos? quando a temperatura da água for de 25^{o}C?
(d) Após quanto tempo a temperatura chegará a 23,2^{o}C?
(e) Em que instante a taxa de resfriamento é de 0,1^{o}C por segundo?

Resp.:



(b) $T_{inicial} = T(0) = 85^oC$ $\quad T_{ambiente} = T(\infty) = 23^oC$
(c) $T'(0) = -15{,}5^oC/min$
$T'(2min) = -9{,}4^oC/min$
$T'(10min) = -1{,}3^oC/min$
$T' = 23 - 4T$; $T=25^oC \Rightarrow T' = -0{,}5^oC/min$
(d) $T=23{,}2^oC \Rightarrow t = 22min57s$
(e) $T' = 0{,}1^oC/s \Rightarrow t = 3min48s$

A FUNÇÃO LOG

DEFINIÇÃO : Sendo a > 0 e $a^b = c$, então $b = \log_a c$
NOTE QUE c > 0 sempre.

Na ausência de qualquer outra indicação, log indica $\log_{10}$ e ln indica $\log_e$.

Exercício 9: Obtenha com a calculadora os números seguintes, expressando o resultado com *quatro significativos*:

(a) log(2) = (b) ln(2) = (c) 2*ln(3) = (d) $\ln(3^2)$= (e) ln(5×8) = (f) ln(5)+ln(8) =

(g) ln(12/7) = (h) ln(12)−ln(7) = (i) $\log(\sqrt{2}) =$ (j) $\frac{1}{2}\log(2) =$

Resp.: (a) 0,3010 (b) 0,6931 (c) 2,197 (d) 2,197 (e) 3,689 (f) 3,689 (g) 0,5390 (h) 0,5390 (i) 0,1505 (j) 0,1505

Os resultados acima ilustram as propriedades mais conhecidas dos logaritmos.
Em qualquer base,

$\log(a \times b) = \log(a)+\log(b)$; $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$; $\log(x^n) = n.\log(x)$

Mudança de base : $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Exercício 10: Utilize sua calculadora para encontrar um número x tal que (*respostas com três significativos*):

(a) $2^x = 5$ (b) $\pi^x = 2$ (c) $3e^x = 5$ (d) $5e^x = 2$ (e) $10^x = e$

Resp.: (a) 2,322 (b) 0,6055 (c) 0,5108 (d) −0,9163 (e) 0,4343

→ É interessante e útil notar que $A^{\log_A x} = x$.

Exercício 11: Encontre o valor de x em cada uma das equações abaixo (*respostas com três significativos*):

(a) $2^{\sqrt{2}} = e^x$ (b) $2^{-\sqrt{2}} = e^x$ (c) $2^{-\sqrt{2}} = 5e^{-x}$ (d) $2^{\sqrt{2}} = 7e^{-x/4}$

Taxas de variação: A derivada de f(x) = ln(x) é $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Em geral, teremos $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Exercício 12: Escreva a fórmula da derivada das funções:

(a) f(x) = ln(3x) (b) $f(x) = 2e^{-2x} + 5\ln(x)$ (c) $f(x)=2x^3-0.2e^{-5x}-\ln(3x)$

(d) f(x) = xln(x) (e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ (f) $f(x) = x^2\ln(x)$

Resp.: (a) $f'(x) = 1/x$ (b) $f'(x) = -4e^{-2x} + 5/x$ (c) $f'(x) = 6x^2 + e^{-5x} - 1/x$ (d) $f'(x) = 1 + \ln(x)$ (e) $f'(x) = \{1 - \ln(x)\}/x^2$ (f) $f'(x) = x + 2x.\ln(x)$

Exercício 13: Um objeto se move sobre uma linha reta, de modo que a sua posição em função do tempo é dada por:

$$s(t) = 20 - 15e^{-t/5} \quad \begin{cases} t \text{ em minutos} \\ s \text{ em metros} \end{cases}$$

(a) Qual sua posição nos instantes 0s, 20s, 1min, 10min e 15min20s ?
(b) Escreva a fórmula para a velocidade instantânea $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$ em função do tempo.
(c) Calcule a velocidade instantânea nos instantes 0s, 20s, 1min, 10min e 15min20s.
(d) Escreva e fórmula para a aceleração $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ em função do tempo.
(e) Calcule a aceleração nos instantes 0s, 20s, 1min, 10min e 15min20s.
(f) Qual a posição do corpo quando sua velocidade for de 2m/s?

(*todas as respostas com três significativos*)

Resp.: (a) 5m ; 5,97m ; 7,72m ; 18,0m ; 19,3m (b) $v(t) = 3e^{-t/5} \begin{cases} t \text{ em minutos} \\ v \text{ em m/min} \end{cases}$ (c) 3,00 ; 2,81 ; 2,46 ; 0,406 ; 0,131 (m/min)
(d) $a(t) = -\dfrac{3}{5}e^{-t/5} \begin{cases} t \text{ em minutos} \\ a \text{ em m/min}^2 \end{cases}$ (e) -0,600 ; -0,561 ; -0,491 ; -0,0812 ; -0,0279 (m/min^2) (f) 10m

Exercício 14: A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que metade dos átomos de uma amostra sofra decaimento. Para uma amostra de Polônio, o número de átomos radioativos remanescentes após t dias é dado por $N_0e^{-t/200}$, onde N_0 é a quantidade inicial de átomos radioativos na amostra.

(a) Qual a meia-vida do Polônio?
(b) Quanto tempo seria necessário para que restasse apenas 1% dos átomos radioativos da quantidade inicial na amostra?

Resp.: (a) ≅ 140 dias (b) ≅ 2 anos e 6 meses

Exercício 15: A meia-vida do Carbono 14 é de 5730 anos. Em uma amostra de madeira fossilizada, constatou-se a presença de apenas 15% do C_{14} encontrado numa árvore viva. Estime a idade da amostra.

Resp.: aproximadamente quinze mil e setecentos anos.

2. A equação diferencial básica com solução exponencial

A função f(t) que é solução de

$$\frac{df}{dt} + \alpha f = k$$

, onde $\alpha > 0$ e k são constantes, é o transiente exponencial simples

$$f(t) = F + (I - F)e^{-\alpha t}$$

Note que $f(0) = I$, $f(\infty) = F = k/\alpha$ e a constante de tempo da exponencial é $\tau = 1/\alpha$.

Exercício 16: Suponha que um copo d´água que saiu do microondas a 70^{o}C demore 20min para chegar à temperatura ambiente T_a = 20^{o}C. A área de contato S do copo e da água com o ar ambiente é de 400cm^2, e a massa M de água no copo é 600g.

(a) Escreva a equação diferencial para a temperatura da água em função do tempo, supondo que a troca de calor pode ser descrita através de um coeficiente de transferência de calor simples h.

Resp.: $\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{Mc}(T - T_a)$. *c é o calor específico da água. Desprezamos o calor específico do copo.*

(b) Estime o valor do coeficiente de transferência de calor entre a água e o ambiente.

Resp.: 0,16kW/m^2.ºC

Exercício 17: Como no Exercício 1: A temperatura no interior de um quarto medindo 4×5×2m é de 25ºC. Há uma única janela de vidro, de 80×45cm, e lá fora está fazendo 10ºC. Está ventando muito, de modo que o coeficiente de transferência de calor pela janela é de 80W/m^2.^{o}C. Suponha que a temperatura do quarto se mantenha uniforme. Em quanto tempo a temperatura dentro do quarto vai chegar aos 10^{o}C? *(resposta com dois significativos)*
A densidade do ar é 1,2kg/m^3, e o calor específico do ar é 1J/g^{o}C.
Não há nada dentro do quarto que gere calor.

Resp: 83min

Exercício 18: No exercício anterior, suponha que há duas pessoas no quarto, e que cada uma libere 96W de calor.
(a) Qual será a temperatura de equilíbrio?
(b) Em quanto tempo a temperatura vai chegar a 20^{o}C?

Resp. (a) 17ºC (b) 25min

Exercício 19: Resolva o exercício 18 no caso em que a potência térmica em Watts liberada por cada pessoa para o ambiente seja dada por P=8(37−T_a), onde T_a é a temperatura ambiente em ^{o}C.

Resp. (a) 20ºC (b) 1h23min