

1ª Série de Exercícios

Números complexos

NÚMEROS COMPLEXOS - DEFINIÇÃO

O PLANO COMPLEXO

FORMAS RETANGULAR E POLAR

1. Esboce os seguintes números no plano complexo, e escreva cada um nas formas retangular e polar.
As respostas que não forem simples devem ser dadas com três significativos e com a fase em graus entre -180° e $+180^\circ$.

(a) $z_1 = 2+j2$

(b) $z_2 = 3 \angle 45^\circ$

(c) $z_3 = 2-j3$

(d) $z_4 = 5 \angle -120^\circ$

(e) $z_5 = -2+j3$

(f) $z_6 = -2-j3$

(g) $z_7 = 3 \angle 90^\circ$

(h) $z_8 = -4+j2$

(i) $z_9 = \pi - j\sqrt{2}$

(j) $z_{10} = -j$

(k) $z_{11} = 2$

Respostas:

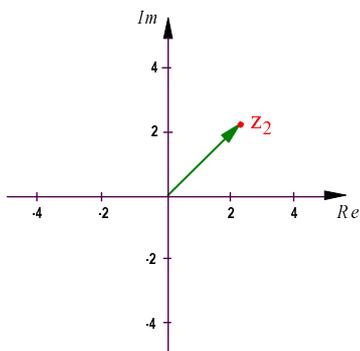
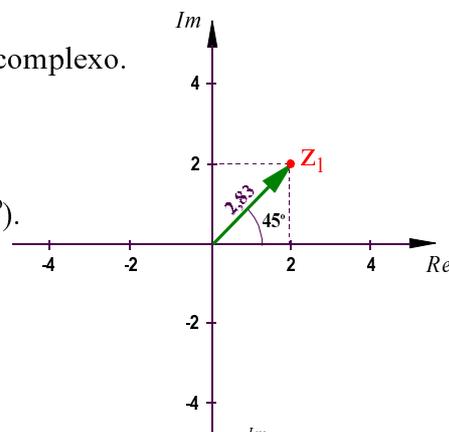
Note que o número complexo $z_1=2+j2$ corresponde ao ponto (2,2) no plano complexo.

As suas partes real e imaginária são $\text{Re}(z_1) = 2$ e $\text{Im}(z_1) = 2$.

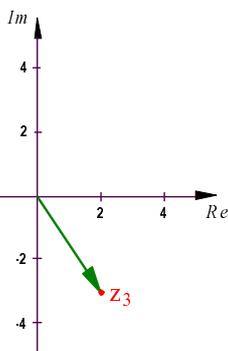
Em coordenadas polares, esse ponto corresponde a $(2\sqrt{2}, 45^\circ) \cong (2,83 ; 45^\circ)$.

Escrevemos então que $2+j2 = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ$

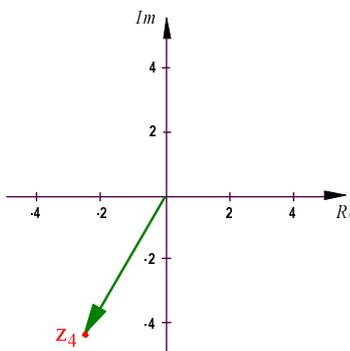
O complexo z_1 pode ser associado ao vetor que liga a origem ao ponto z_1 .



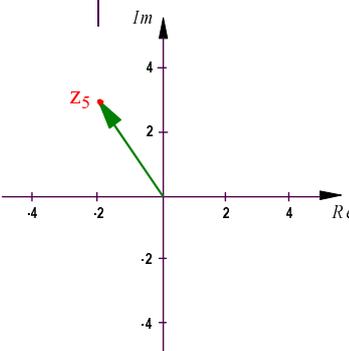
$z_2 = (3, 45^\circ) = 2,12 + j2,12$



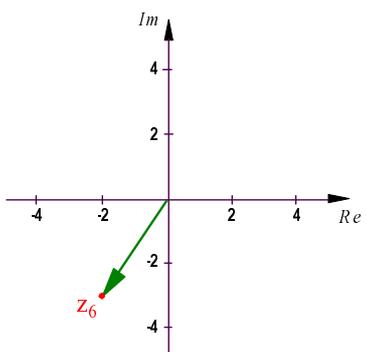
$z_3 = 2 - j3 = (3,61, -56^\circ)$



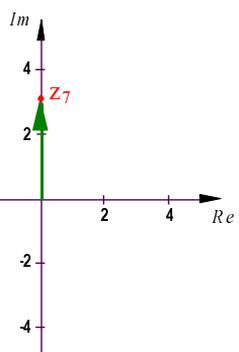
$z_4 = (5, -120^\circ) = -2,5 - j4,33$



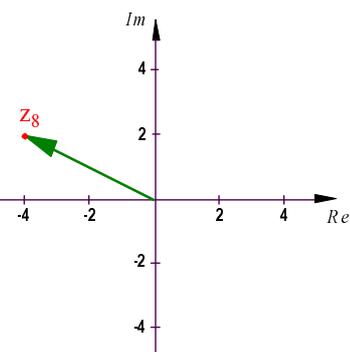
$z_5 = -2 + j3 = (3,61, 124^\circ)$



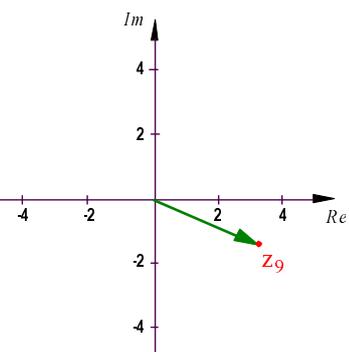
$z_6 = -2 - j3 = (3,61, -124^\circ)$



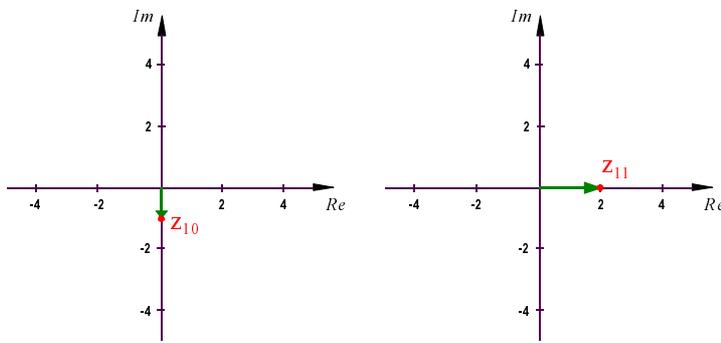
$z_7 = (3, 90^\circ) = 3j$



$z_8 = -4 + j2 = (4,47, 153^\circ)$



$z_9 = \pi - j\sqrt{2} = (3,45, -24^\circ)$



$$z_{10} = -j = 1 \angle -90^\circ$$

$$z_{11} = 2 = 2 \angle 0^\circ$$

CONJUGAÇÃO

2. Repita o exercício 1 para cada um dos complexos conjugados de z_1 a z_{11} .

Respostas:

$$\bar{z}_1 = 2 - j2 = 2,83 \angle -45^\circ$$

$$\bar{z}_2 = 3 \angle -45^\circ = 2,12 - j2,12$$

$$\bar{z}_3 = 2 + j3 = 3,61 \angle 56^\circ$$

$$\bar{z}_4 = 5 \angle 120^\circ = -2,5 + j4,33$$

$$\bar{z}_5 = -2 - j3 = 3,61 \angle -124^\circ$$

$$\bar{z}_6 = -2 + j3 = 3,61 \angle 124^\circ$$

$$\bar{z}_7 = 3 \angle -90^\circ = -3j$$

$$\bar{z}_8 = -4 - j2 = 4,47 \angle -153^\circ$$

$$\bar{z}_9 = \pi + j\sqrt{2} = 3,45 \angle 24^\circ$$

$$\bar{z}_{10} = j = 1 \angle 90^\circ$$

$$\bar{z}_{11} = 2 = 2 \angle 0^\circ$$

OPERAÇÕES

3. Efetue as operações pedidas, com os complexos citados no exercício 1. Escreva o resultado nas formas retangular e polar. Esboce a operação no plano complexo.

(a) $w_1 = z_1 + z_2$

(b) $w_2 = z_2 - z_3$

(c) $w_3 = z_1 + z_3 + z_7$

(d) $w_4 = 2z_1 + z_5/2$

(e) $w_5 = -z_2 + 3z_7$

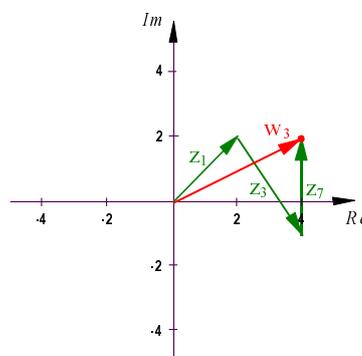
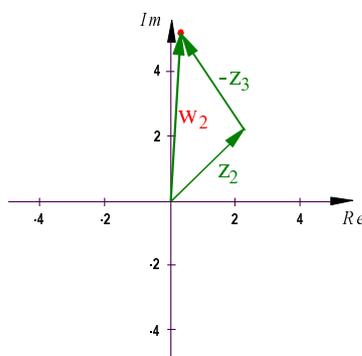
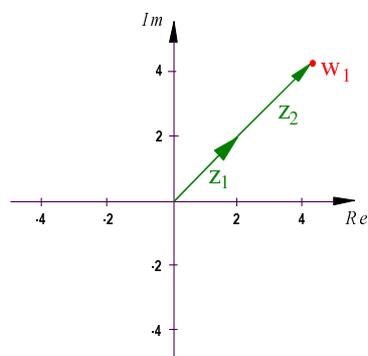
(f) $w_6 = z_2 + \bar{z}_2$

(g) $w_7 = z_2 - \bar{z}_2$

(h) $w_8 = z_3 + z_5 + \bar{z}_{10} + \bar{z}_{11}$

(i) $w_9 = z_2 + z_4$

Respostas:



$$w_1 = 4,12 + j4,12 = 5,83 \angle 45^\circ$$

$$w_2 = 0,12 + j5,12 = 5,12 \angle 89^\circ$$

$$w_3 = 4 + j2 = 4,47 \angle 27^\circ$$

$$w_4 = 3,00 + j5,50 = 6,26 \angle 61^\circ$$

$$w_5 = -2,12 + j6,88 = 7,20 \angle 107^\circ$$

$$w_6 = 4,24 = 4,24 \angle 0^\circ$$

$$w_7 = 4,24j = 4,24 \angle 90^\circ$$

$$w_8 = 2 + j = 2,24 \angle 27^\circ$$

$$w_9 = -0,38 + j2,21 = 2,24 \angle -100^\circ$$

4. Efetue as operações pedidas, com os complexos citados no exercício 1, trabalhando apenas na forma retangular.

- (a) $u_1 = z_1 \cdot z_3$ (b) $w_1 = z_3 \cdot \bar{z}_3$ (c) $u_2 = z_1/z_3$ (d) $v_1 = z_6 \cdot z_8$ (e) $v_2 = z_6/z_8$
 (f) $\xi_1 = z_1 \cdot z_{10}$ (g) $\xi_2 = 1/z_{10}$ (h) $w_2 = z_8 / \bar{z}_8$ (i) $p = z_3^2$

Respostas:

$$u_1 = (2+j2) \cdot (2-j3) = 4-j6+j4-j^2 \cdot 6 = 4-j6+j4+6 = 10-j2$$

$$w_1 = (2-j3) \cdot (2+j3) = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$u_2 = \frac{2+j2}{2-j3} = \frac{(2+j2) \cdot (2+j3)}{(2-j3) \cdot (2+j3)} = \frac{4+j6+j4-6}{2^2+3^2} = \frac{-2+j10}{13} = -\frac{2}{13} + j\frac{10}{13} = -0,154 + j0,769$$

$$v_1 = 14 + j8 \quad v_2 = 0,1 + j0,8 \quad \xi_1 = 2 - j2 \quad \xi_2 = j \quad w_2 = 0,6 - j0,8 \quad p = -5 - j12$$

5. Mostre que as seguintes identidades são verdadeiras, utilizando os complexos na forma retangular ou polar, conforme mais conveniente:

- (a) $\overline{w+v} = \bar{w} + \bar{v}$ (b) $\overline{w-v} = \bar{w} - \bar{v}$ (c) $\overline{w \cdot v} = \bar{w} \cdot \bar{v}$ (d) $\overline{w/v} = \bar{w}/\bar{v}$ (e) $\overline{w^2} = \bar{w}^2$

Procedimento:

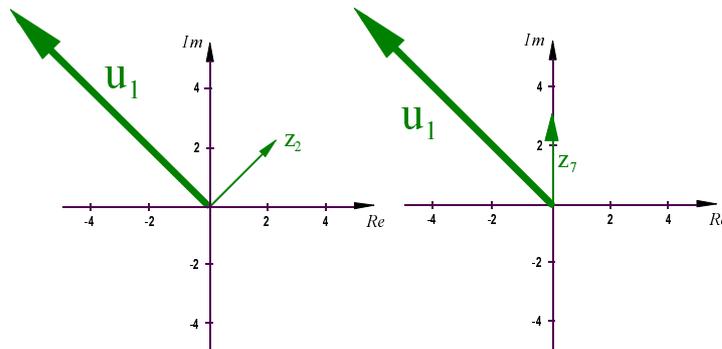
Basta notar que:
 na forma retangular, se $z = a + jb$ então $\bar{z} = a - jb$
 na forma polar, se $z = M \angle \theta$, então $\bar{z} = M \angle -\theta$

6. Efetue as operações pedidas, com os complexos citados no exercício 1, trabalhando apenas na forma polar. Esboce cada operação no plano complexo, interpretando as mesmas como rotações e dilatações.

- (a) $u_1 = z_2 \cdot z_7$ (b) $u_2 = z_2/z_7$ (c) $v_1 = z_2 \cdot z_4$ (d) $v_2 = z_2/z_4$
 (e) $\xi_1 = z_4 \cdot z_7$ (f) $m = z_4/z_7$ (f) $\xi_2 = 1/z_{10}$

Respostas:

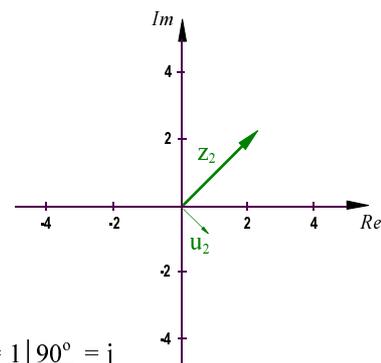
$u_1 = z_2 \cdot z_7$
 $u_1 = 9 \angle 135^\circ$



como $z_7 = 3 \angle 90^\circ$, z_2 será girado de 90° no sentido anti-horário e multiplicado por 3.
 ou então: $z_2 = 3 \angle 45^\circ$, e z_7 será girado de 45° no sentido anti-horário e multiplicado por 3.

$u_2 = z_2/z_7$
 $u_2 = 1 \angle -45^\circ$

$z_7 = 3 \angle 90^\circ$, então z_2 será girado de 90° no sentido horário e dividido por 3.



$v_1 = 15 \angle -75^\circ$ $v_2 = 0,6 \angle 165^\circ$ $\xi_1 = 15 \angle -30^\circ$ $m = 1,67 \angle 150^\circ$ $\xi_2 = 1 \angle 90^\circ = j$

7. Efetue as operações pedidas. Escreva o resultado nas formas retangular e polar.

(a) $(2 + j3)(2 - j3)$ (b) $(-2 - j3)(3 + j2) + (-3 + j4)$ (c) $5 - j3 + \frac{2 + 3j}{1 - j}$
 (d) $3 \angle 45^\circ + 2 \angle 120^\circ$ (e) $3 \angle 45^\circ \times 2 \angle 120^\circ$ (f) $\frac{3 \angle 45^\circ}{2 \angle 120^\circ}$ (g) $2 \angle 30^\circ - 5 \frac{8 \angle 60^\circ + 10 \angle -120^\circ}{4 \angle 150^\circ}$

Respostas:

(a) 13 (b) $-3 - j9 = 9,49 \angle -108^\circ$ (c) $4,5 - j0,5 = 4,53 \angle -6^\circ$ (d) $1,12 + j3,85 = 4,01 \angle 74^\circ$
 (e) $-5,80 + j1,55 = 6,00 \angle 165^\circ$ (f) $0,388 - j1,45 = 1,50 \angle -75^\circ$ (g) $1,73 - j1,50 = 2,29 \angle -41^\circ$

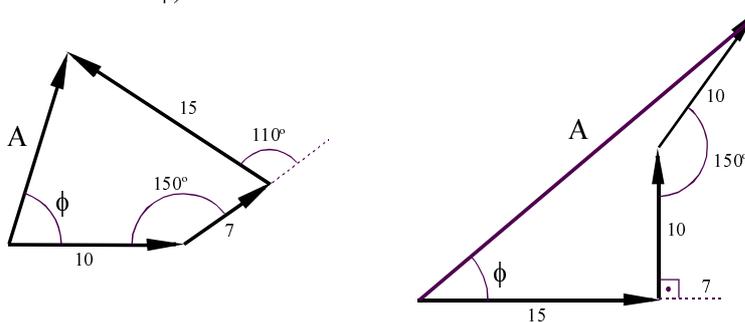
8. Efetue as operações pedidas, com os complexos citados no exercício 1. Escreva o resultado nas formas retangular e polar.

(a) $\frac{Z_1 + Z_2}{Z_4 - Z_8}$ (b) $\frac{Z_2}{Z_7}$ (c) $\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_5}$ (d) $\frac{Z_2 \cdot Z_7}{Z_4 \cdot Z_{10}}$

Respostas:

(a) $-0,470 + j0,763 = 0,896 \angle 121^\circ$ (b) $-0,707 + j0,707 = 1,00 \angle 135^\circ$
 (c) $-2,00 - j2,00 = 2,83 \angle -135^\circ$ (d) $1,74 - j0,466 = 1,80 \angle -15^\circ$

9. Determine o vetor resultante nas somas abaixo, interpretando-os como números complexos. (encontre os valores de A e de ϕ).



Respostas:

$A = 13,9 \quad \phi = 71^\circ$

$A = 27,4 \quad \phi = 43^\circ$

POTÊNCIAS E RAÍZES DE EQUACÕES

10. Utilizando a identidade de Euler, determine todos os complexos distintos z tais que:

(a) $z^3 = 1$ (b) $z^4 = -1$ (c) $z^5 = -32$ (d) $z^2 = 15+j20$ (e) $z^3 = j$

Respostas:

(a) $1 \sqrt[0]{0^\circ} = 1$ $1 \sqrt[120]{120^\circ} = -0,500 + j0,866$ $1 \sqrt[240]{240^\circ} = -0,500 - j0,866$	(b) $1 \sqrt[45]{45^\circ} = 0,707 + j0,707$ $1 \sqrt[135]{135^\circ} = -0,707 + j0,707$ $1 \sqrt[225]{225^\circ} = -0,707 - j0,707$ $1 \sqrt[315]{315^\circ} = 0,707 - j0,707$	(c) $2 \sqrt[36]{36^\circ} = 1,62 + j1,18$ $2 \sqrt[108]{108^\circ} = -0,618 + j1,902$ $2 \sqrt[180]{180^\circ} = -2,00$ $2 \sqrt[252]{252^\circ} = -0,618 - j1,902$ $2 \sqrt[324]{324^\circ} = 1,62 - j1,18$
(d) $5 \sqrt[27]{27^\circ} = 4,47 + j2,24$ $5 \sqrt[207]{207^\circ} = -4,47 - j2,24$	(e) $1 \sqrt[30]{30^\circ} = 0,866 + j0,500$ $1 \sqrt[150]{150^\circ} = -0,866 + j0,500$ $1 \sqrt[270]{270^\circ} = -j$	

11. Determine o valor de w de modo que o complexo $(1-j)$ seja raiz de $f(z) = z^3 - 2z^2 + 4z + w$.

Resposta: $w = -2 + 2j$

FUNÇÕES EXPONENCIAIS, TRIGONÔMETRICAS E HIPERBÓLICAS

12. Mostre as seguintes identidades:

(a) $\sin(a + jb) = \sin(a) \cdot \cosh(b) + j \cos(a) \cdot \sinh(b)$ (b) $\cos(a + jb) = \cos(a) \cdot \cosh(b) - j \sin(a) \cdot \sinh(b)$
(c) $\sinh(a + jb) = \sinh(a) \cdot \cos(b) + j \cosh(a) \cdot \sin(b)$ (d) $\cosh(a + jb) = \cosh(a) \cdot \cos(b) + j \sinh(a) \cdot \sin(b)$

Utilize as definições e as fórmulas:

$$\cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \quad \sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \quad \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

13. Calcule os seguintes valores, escrevendo o resultado nas formas retangular e polar.

(a) e^{2j} (b) $-2e^{-1+0,2j}$ (c) $\sin(j)$ (d) $5\cos(1-0,5j)$ (e) $10\tan(-1+j)$
(f) $2\sinh(j)$ (g) $-6\cosh(0,5-0,2j)$ (h) $\tanh(1-j)$

Respostas:

(a) $-0,416 + j0,909 = 1 \sqrt[2]{2} = 1 \angle 115^\circ$ (b) $-0,721 - j0,146 = 0,736 \sqrt[2]{2,94} = 0,736 \angle -169^\circ$
(c) $1,18j = 1,18 \sqrt[90]{90^\circ}$ (d) $3,05 + j2,19 = 3,75 \sqrt[36]{36^\circ}$ (e) $-2,72 + j10,8 = 11,2 \sqrt[104]{104^\circ}$
(f) $1,68j = 1,68 \sqrt[90]{90^\circ}$ (g) $-6,63 + j0,621 = 6,66 \sqrt[175]{175^\circ}$ (h) $1,08 - j0,272 = 1,12 \sqrt[-14]{-14^\circ}$

SOLUÇÃO DE EQUACÕES

14. Obtenha um complexo z tal que:

(a) $e^z = -1$ (b) $e^z = 1+j$ (c) $e^z = 5$

É necessário lembrar que

(1) todo número complexo pode ser escrito na forma $Me^{j\theta}$

(2) se dois complexos $M_1e^{j\theta_1}$ e $M_2e^{j\theta_2}$ são iguais, onde $M_1 \geq 0$, $M_2 \geq 0$ e θ_1 e θ_2 são reais, então $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Respostas:

(a) $z = j(\pi + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(b) $z = \ln \sqrt{2} + j\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(c) $\ln 5 + j2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

15. Verifique que os complexos da forma $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + j\ln(2 \pm \sqrt{3})$, onde k é um número inteiro, satisfazem a equação $\operatorname{sen}(z) = 2$.
