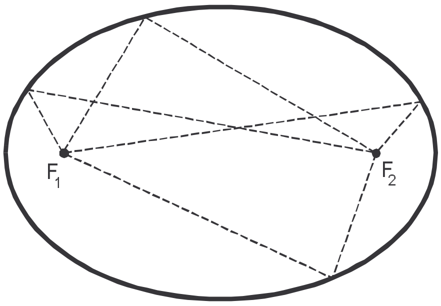
Notas de aula e 2ª Série de Exercícios

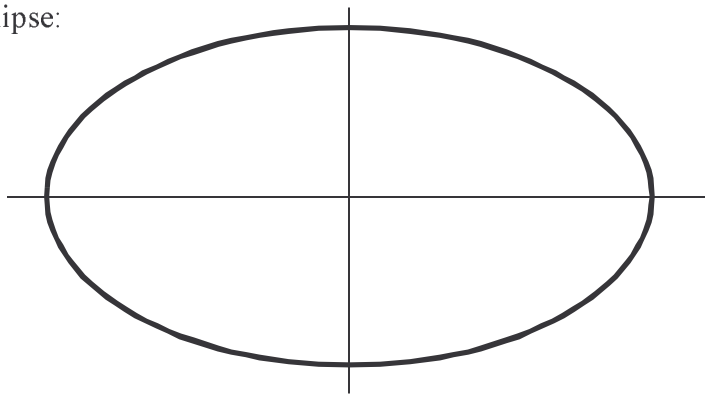
ÓPTICA GEOMÉTRICA

1. ESPELHO ELÍPTICO E O PRINCÍPIO DE FERMAT

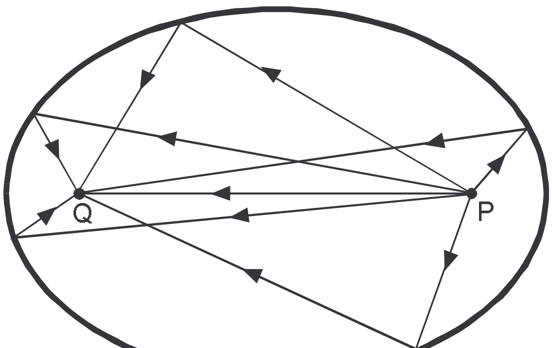
(I) A elipse é o lugar geométrico dos pontos tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante.



Exercício 1: Encontre a posição dos focos da elipse:



(II) Suponha que desejemos construir uma superfície espelhada de modo que todos os raios de luz que emanam de P atinjam um mesmo ponto Q. De acordo com o princípio do tempo mínimo de Fermat, todos os caminhos ópticos de P a Q, passando pelo espelho, devem ter o mesmo comprimento. Portanto, essa superfície deve ter a forma de uma elipse de revolução.

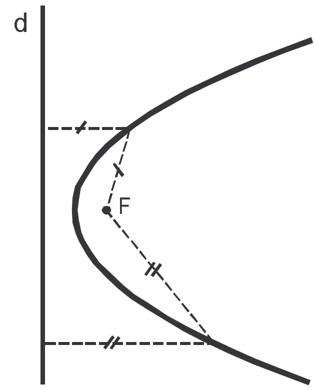


Exercício 2: Se a distância de P a Q for de 20cm, qual deve ser a distância focal F, o tamanho do eixo maior A e o tamanho do eixo menor B da superfície elíptica, de modo que o comprimento L do caminho óptico de um raio de luz que sai de P, reflete na superfície e atinge Q seja de 30cm? *(respostas com 3 significativos)*

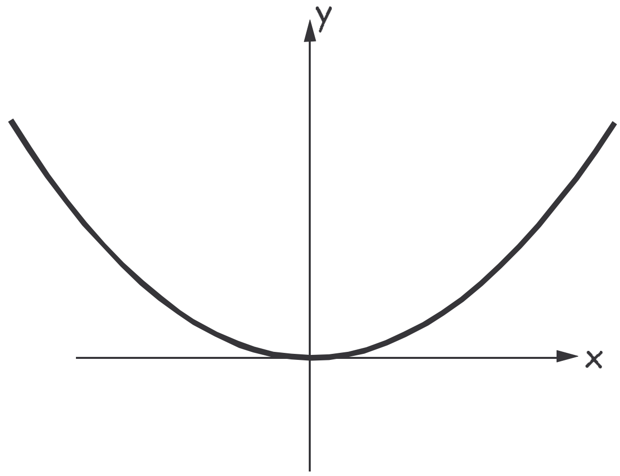
Resp.: F = 10,0cm ; A = 15,0cm ; B = 11,2cm

2. ESPELHOS PARABÓLICOS

(III) Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam de um ponto dado (F, foco) e de uma reta dada (d, diretriz).



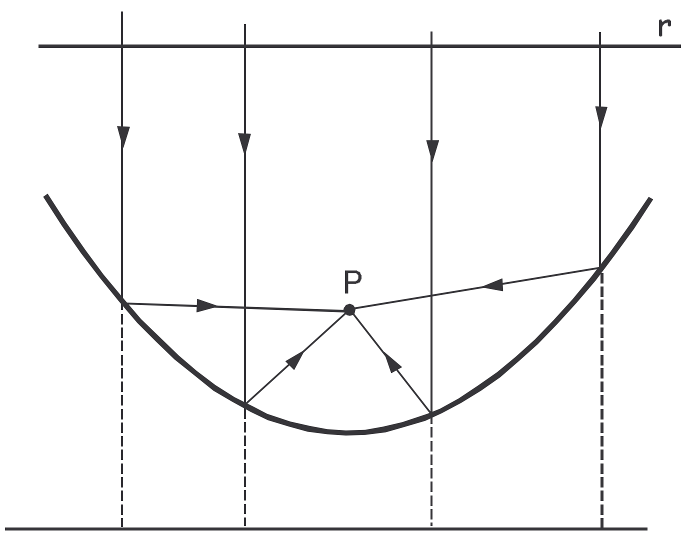
Exercício 3: Encontre a posição do foco e da diretriz da parábola $y = x^2/4$.



Resp: o foco é o ponto (0,1) e a diretriz a reta y=-1.

(IV) Se uma superfície espelhada for parabólica, então todos os raios que nela incidem paralelos ao eixo refletem passando pelo foco.

Isto pode ser visto como uma conseqüência do princípio do tempo mínimo de Fermat, conforme o esquema abaixo. Se uma fonte de luz que está bastante longe emite raios que chegam paralelos ao eixo do espelho, então, para que todos esses raios convirjam para o ponto P, é necessário que todos os caminhos ópticos a partir de uma frente de referência qualquer **r** sejam iguais.

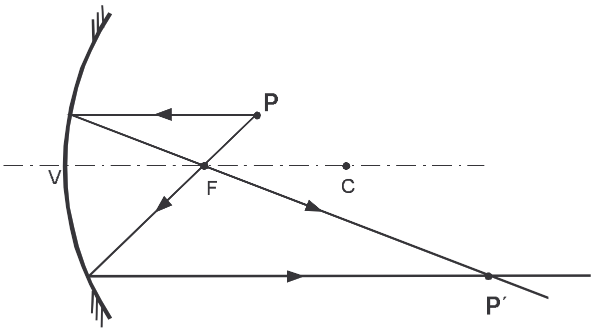


(V) A propriedade de focalização é utilizada para a construção de antenas e refletores parabólicos. As antenas e espelhos parabólicos devem ser posicionados na direção do objeto emissor. Se os raios de luz chegarem ao espelho em uma direção inclinada em relação ao eixo do mesmo, pode-se mostrar que há a formação de duas regiões de foco embaçado (astigmatismo).

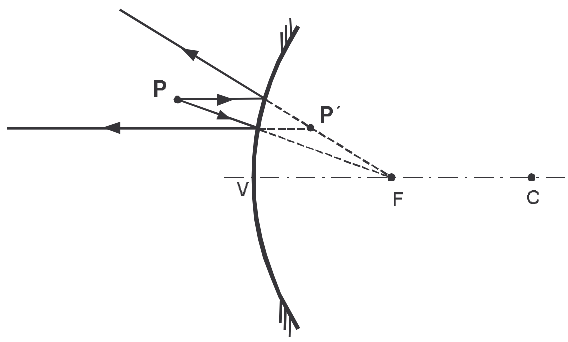
3. ESPELHOS ESFÉRICOS

(VI) Espelhos parabólicos são caros de construir e, de certa forma, não resolvem a maioria das situações práticas em que se deseja um efeito de aumento ou diminuição da imagem de um objeto mais ou menos próximo. Uma solução prática bastante comum e eficiente é utilizar espelhos esféricos. Se a curvatura de um espelho esférico é pequena (raio grande !) e se ele for utilizado para raios de luz que incidem formando ângulos bem pequenos (no máximo em torno de 5^{o}) em relação o eixo (raios para-axiais), haverá pouca distorção (aberração) das imagens. Esses espelhos são conhecidos como espelhos esféricos de Gauss.

(VII) Na aproximação para-axial, o foco F de um espelho esférico está situado a meia distância entre o vértice V e o centro C. Todo raio de luz que incide paralelo ao eixo do espelho reflete passando pelo foco F, e todo raio de luz incidente que passa pelo foco F reflete na direção paralela ao eixo. Dessa forma, podemos encontrar a posição aproximada da imagem de um ponto P pelo espelho.



ESPELHO CÔNCAVO (foco real)
Neste exemplo, a imagem formada é real.



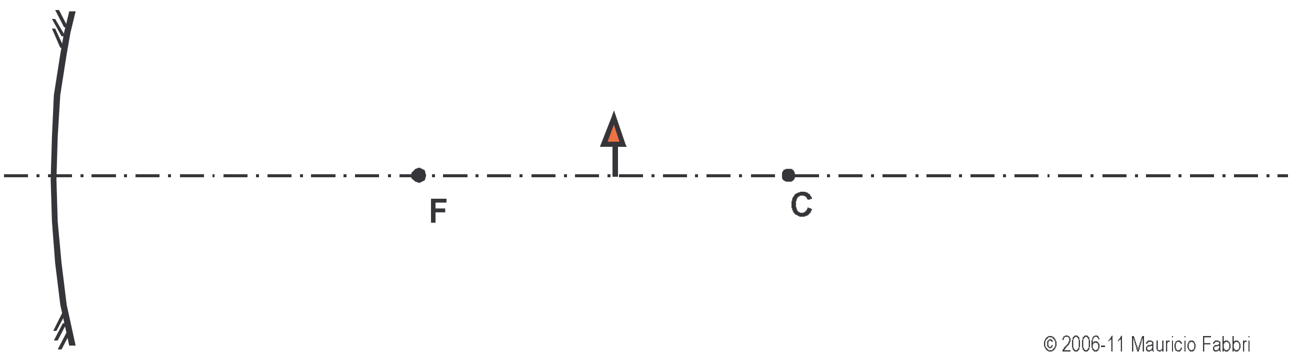
ESPELHO CONVEXO (foco virtual)
A imagem formada é virtual.

(VIII) Obedecendo a certas convenções de sinais, pode-se mostrar que, dentro da aproximação para-axial, as posições do foco f e das imagens p e p´ obedecem à equação de Gauss,

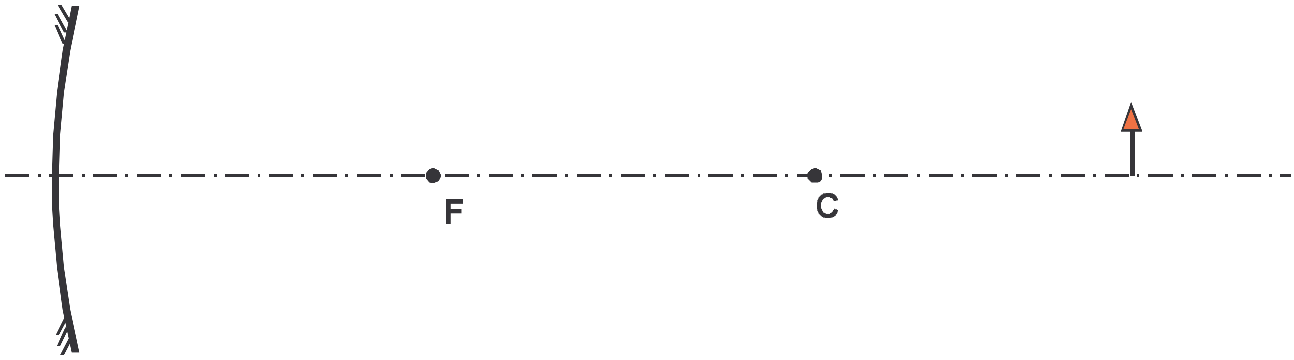
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Exercício 4: Em cada caso, localize graficamente a imagem do objeto, e verifique se é real ou virtual, direita ou invertida, e se é maior ou menor que o objeto. Despreze efeitos de aberração, isto é, suponha que a imagem tem a mesma forma que o objeto.

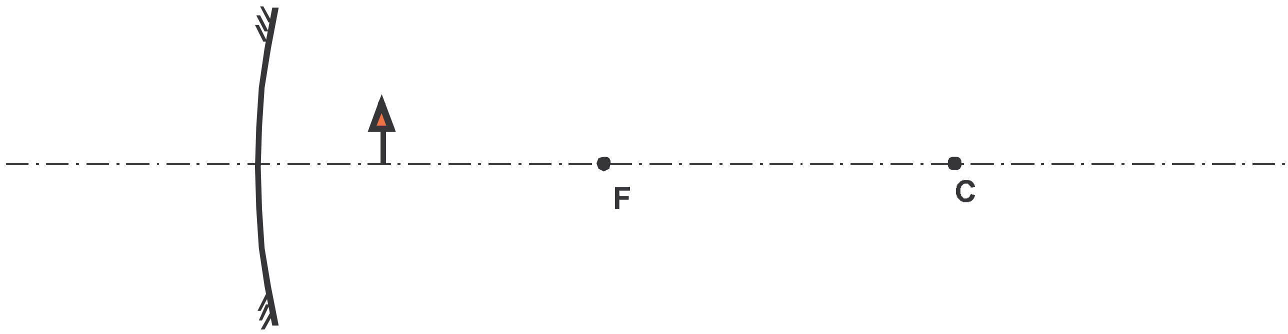
(a)



(b)



(c)



Resp: (a) real, invertida e maior (b) real, invertida e menor (c) virtual, direita e maior

2. REFRAÇÃO DA LUZ

(IX) A velocidade da luz é menor quando ela se propaga em um meio material. O índice absoluto de refração de um material é definido como a razão entre as velocidades da luz no vácuo ($c = 3\times10^8$ m/s) e no material (v) em questão:

$$n = \frac{c}{v}$$

($n > 1$ para qualquer material)

(X) O índice de refração depende da freqüência da luz incidente, ou seja, da cor da luz. É por esse motivo que um prisma pode decompor a luz branca em suas várias componentes (cores), formando um arco-íris. O desvio sofrido por um raio de luz ao atravessar a interface entre dois meios é tanto maior quanto maior for a razão entre os índices de refração.

índice de refração típicos (valores médios) de algumas substâncias

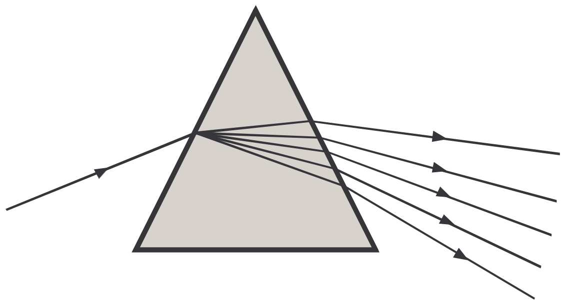
ar	1,000293
água	1,333
gelo	1,310
vidro pyrex	1,474
cloreto de sódio	1,544
diamante	2,417

Exercício 5: O índice de refração de uma peça de quartzo fundido varia com a freqüência conforme a tabela abaixo.

comprimento de onda da luz	6563 Å	5892 Å	4861 Å	4340 Å
índice de refração	1,45640	1,45845	1,46318	1,46690

(fonte: Jenkins & White)

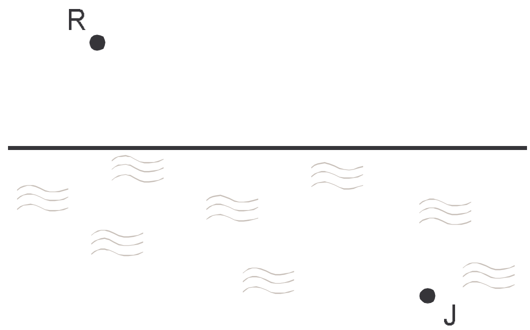
Um prisma de quartzo fundido é usado para separar as cores de um raio de sol, como na figura abaixo:



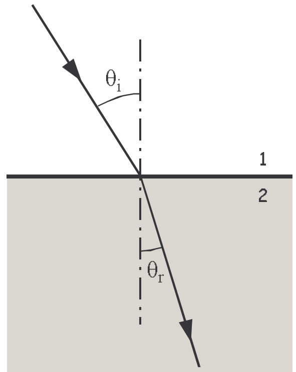
As cores resultantes foram vermelho, amarelo, verde, azul e violeta. Marque na figura a cor de cada raio emergente do prisma.

(XI) Ao atravessar a interface entre dois meios, observa-se que o desvio sofrido por um raio de luz é tal que ele fica mais próximo da normal no meio mais refrativo, ou seja, no meio aonde a velocidade da luz é menor. Isso pode ser explicado, mais uma vez, pelo princípio do tempo mínimo de Fermat, conforme ilustra o exercício que segue.

Exercício 6: Romeu está na praia quando ouve o grito de socorro de Julieta, que parece estar se afogando no mar. Ocorre que Romeu corre mais depressa pela areia do que nada no mar. Mostre que há um ponto ótimo em que Romeu deve entrar na água de modo a chegar o mais depressa possível à sua amada.

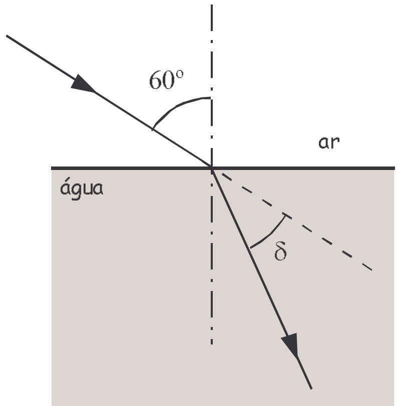


(XII) *(Lei de Snell-Descartes)* Seja θ_i o ângulo de incidência de um feixe de luz na interface entre dois meios 1 e 2. Se a velocidade da luz é menor no meio 2, então o feixe sofre um desvio na interface, aproximando-se da normal. Se θ_r é ângulo de refração, teremos



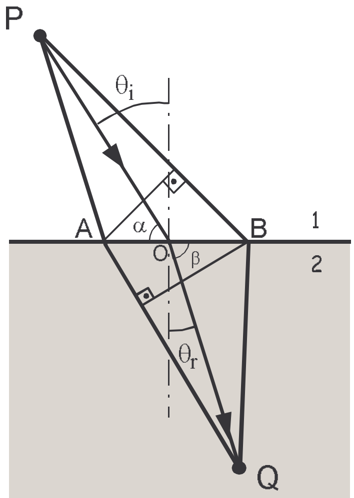
$$\boxed{n_1 \text{sen}(\theta_i) = n_2 \text{sen}(\theta_r)}$$

Exercício 7: Calcule o desvio δ, em graus e minutos, que um feixe de luz sofre ao incidir em uma interface ar-água fazendo 60^o com a normal.



Resp: 17°28′

(XIII) A Lei de Snell é uma conseqüência do princípio do tempo mínimo de Fermat. Isto pode ser facilmente demonstrado utilizando o cálculo diferencial. Uma demonstração mais elementar, mas bastante instrutiva, pode ser feita como segue.



Seja POQ o caminho óptico que leva o menor tempo para ir de P a Q, passando pela interface entre os meios 1 e 2, onde a velocidade da luz é v_1 e v_2, respectivamente.

1. Se POQ é o caminho que leva um tempo mínimo t_0, então existem dois caminhos próximos PAQ e PBQ com tempos ópticos iguais a um mesmo valor $t > t_0$. Escolhendo esses caminhos bem próximos a POQ, o ângulo PBA é aproximadamente igual a α e o ângulo QAB é aproximadamente igual a β.

2. Em relação ao caminho PAQ, o caminho PBQ leva um tempo adicional $\dfrac{\overline{AB}\cos\alpha}{v_1}$, mas economiza o tempo $\dfrac{\overline{AB}\cos\beta}{v_2}$.

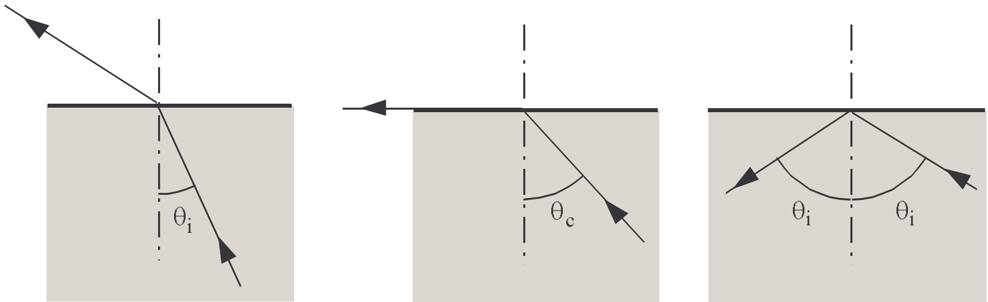
3. Como os tempos dos caminhos PAQ e PBQ são iguais, devemos ter

$$\frac{\overline{AB}\cos\alpha}{v_1} = \frac{\overline{AB}\cos\beta}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos\alpha}{v_1} = \frac{\cos\beta}{v_2}$$

Mas $\cos(\alpha) = \text{sen}(\theta_i)$ e $\cos(\beta) = \text{sen}(\theta_r)$. Lembrando que $n_1 = \dfrac{c}{v_1}$ e $n_2 = \dfrac{c}{v_2}$, chegamos a

$n_1\text{sen}(\theta_i) = n_2\text{sen}(\theta_r)$, que é a lei de Snell.

(XIV) *(reflexão total)* Ao passar de um meio mais refringente para um meio menos refringente, um raio de luz afasta-se da normal. Há um valor crítico do ângulo de incidência, θ_c, tal que o ângulo de refração é 90^o. Se o ângulo de incidência é maior que θ_c, o raio de luz não atravessa mais a interface e sofre reflexão total.



$\theta_i < \theta_c$ $\qquad$ $\theta_i = \theta_c$ $\qquad$ $\theta_i > \theta_c$

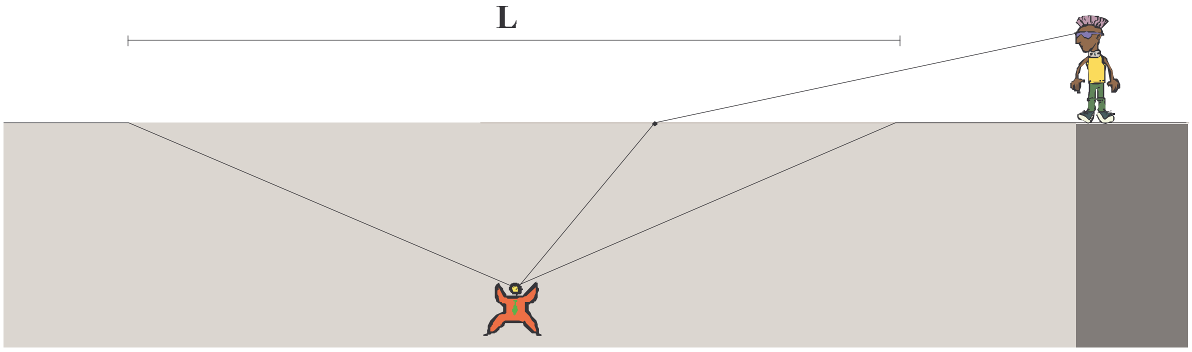
Exercício 8: Calcule o ângulo crítico para reflexão total, em graus e minutos, referente a um feixe de luz que, vindo da água, incide sobre a interface com o ar.

Resp: 48º 38´

Exercício 9: Um mergulhador, a dez metros da margem de um rio, submerge para três metros de profundidade. Supondo a água perfeitamente límpida e parada,

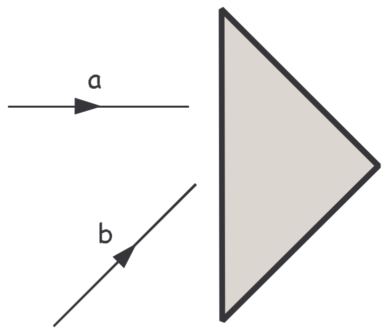
(a) Qual o diâmetro L da superfície sobre a água, através da qual o mergulhador vê o mundo exterior?

(b) Na margem, há um curioso com altura 2,0m. O raio de luz que sai da cabeça dessa pessoa e atinge o mergulhador incide na água a 6,9m da margem (este valor pode ser calculado numericamente). Qual a altura aparente dessa pessoa para o mergulhador? Qual a profundidade aparente do mergulhador para o curioso?



Resp: (a) 6,8m (b) 6,7m ; 90cm

Exercício 10: Calcule e desenhe as trajetórias dos raios de luz a e b ao atravessar o prisma, que é feito de vidro pyrex. (o prisma é reto e isósceles)



Resp: O raio a sofre reflexão total nas paredes internas do prisma. O raio b emerge do prisma sofrendo um desvio total de 24º .

REFERENCIAS

1. Feynman, R. *Lectures on Physics*, Vol.I. Addison-Wesley, 1963
2. Jenkins, F.A. and White, H.E. *Fundamentals of Optics,* 4ª ed., McGraw-Hill, 1976
3. Ramalho Jr., F.; Ferraro, N.G. e Soares, P.A.T. *Os Fundamentos da Física*, Vol.2 (6ª ed.). Editora Moderna, 1993.
4. Keller, F.J.; Gettys, W.E. e Skowe, M.J. *Física*, Vol.2, Makron, 1999