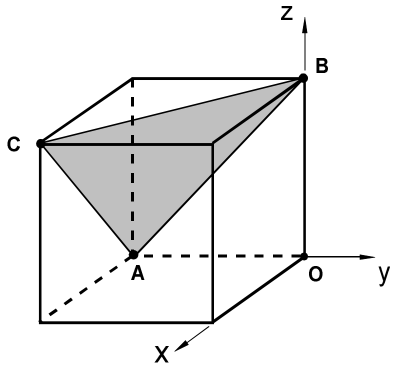
Cálculo Diferencial

Exercícios de reforço para a segunda prova

2º sem 2012 Prof. Fabbri

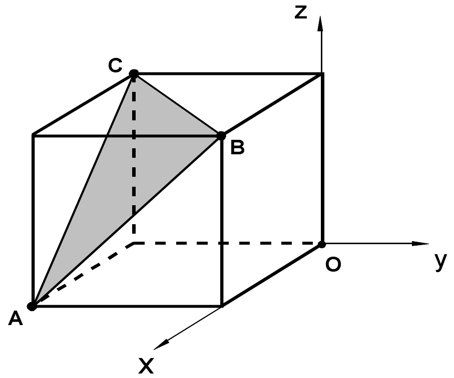
Ex. 1) Em relação ao sistema de coordenadas xyz, com origem (0,0,0) no ponto O, o plano ABC corresponde ao gráfico da função $f(x,y) = \frac{8}{5}x + \frac{8}{7}y + 8$. Obtenha o volume do paralelepípedo. *Resp.*: 280



Reforço: Repita o exercício para a figura ao lado, onde

$$f(x,y) = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{6}y + 14 \ ,$$

Resp.: 168



Ex. 2) A temperatura T nos pontos de uma barra disposta o longo do eixo x varia com o tempo t de acordo com $T(x,t) = 15(9-4x)e^{-3t/7}$, t em minutos e x em metros. Calcule, na posição x = 1,8m e no instante t = 3min,

- a taxa de variação da temperatura com o tempo, em °C/minuto, e
- o gradiente de temperatura ao longo da barra, em °C/cm.

Resp.: –3,20°C/min; –0,17°C/cm

Reforço: Repita para $T(x,t) = 18(7-3x)e^{-2t/3}$, na posição x = 2,1m e no instante t = 2min
Resp.: –2,21°C/min; –0,14°C/cm

Ex.3) A altura *H* de uma montanha, em relação ao plano *(x,y)*, obedece à equação:

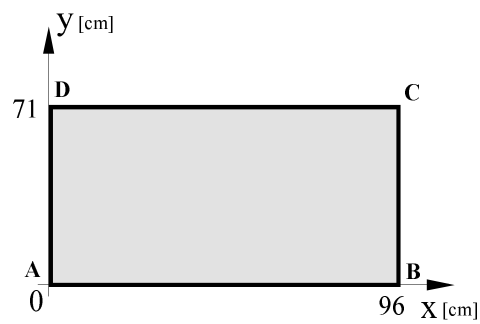
$$H(x,y) = 1200 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{7}y^2 \qquad \begin{cases} \text{H em metros} \\ \text{(x,y) em km} \end{cases}$$

Suponha que o eixo x aponte para o Leste, e que o eixo y aponte para o Norte.
Um alpinista está sobre o ponto (–4 ; –5 ; 520). Nesse ponto, em qual direção o terreno é mais inclinado? *Resp.: 46° NE*

Reforço: Repita os cálculos se o alpinista estiver no ponto (12 ; –14 ; 980) da montanha
Resp. :48° NW

Ex. 4) A distribuição de temperatura numa placa retangular ao lado obedece à equação abaixo:

$$T(x,y)=\left(-\frac{400}{96}x+200\right)\frac{y}{71}+\left(\frac{600}{96}x+200\right) \qquad \begin{cases}(x,y) \text{ em cm}\\ T \text{ em } ^{o}C\end{cases}$$



No vértice A, qual é o gradiente de temperatura em direção ao vértice C?

Resp.: 6,70°C/cm

Reforço: Exercício 26 da 4ª série.

PONTOS CRITICOS; MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Um ponto $P(x_0,y_0)$ é chamado de "ponto crítico" da função f(x,y) se e somente se $f_x(P) = f_y(P) = 0$.

Um ponto crítico pode ser um máximo ou um mínimo local, ou ainda um ponto de cela. A natureza de um ponto crítico pode ser investigada calculando as grandezas a, b, c e Δ, como segue:

$$a = f_{xx}(P); \quad b = f_{xy}(P); \quad c = f_{yy}(P); \quad \Delta = b^2 - ac$$

$$\text{se } \Delta < 0\text{, então } \begin{cases}\text{se } a < 0 \Rightarrow P \text{ é máximo local}\\ \text{se } a > 0 \Rightarrow P \text{ é mínimo local}\end{cases}$$

se $\Delta > 0$, então P é um ponto de cela

se $\Delta = 0$, é preciso realizar mais testes para decidir sobre a natureza de P

Ex. 5) Considere a função $f(x,y)=2x^2+y^2+(x^4+x^3-6)y-5$. P(0,3) é um ponto crítico de *f*. Investigue a natureza de P utilizando o procedimento acima.

Resp.: P é um ponto de mínimo local (a=4 e Δ = −8)

Reforço: Repita a análise para os casos:

(a) ponto crítico P(0,0) da função $f(x,y)=2xy-(1+y)^3x^2-4y^2-8x^2+20$

Resp.: P é um ponto de máximo local (a = −18 e Δ = −140)

(b) ponto crítico P(1,1) da função $f(x,y)=x^3y^2+xy^3+x^2y^2+xy-8y-7x+9$

Resp.: P é um ponto de cela (Δ = 116)