CÁLCULO DIFERENCIAL

2º Semestre de 2012

Prof. Maurício Fabbri

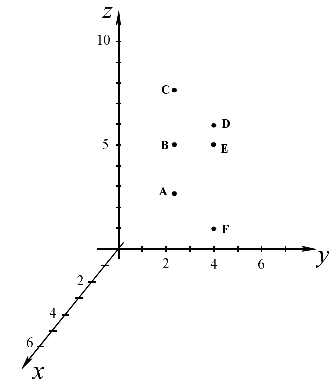
4ª Série de Exercícios

Coordenadas no espaço; funções de várias variáveis; derivadas parciais e direcionais; pontos críticos

COORDENADAS NO ESPAÇO

Ex. 1) No sistema de coordenadas ao lado, em perspectiva paralela, o ponto (3,4,5) corresponde aproximadamente a:

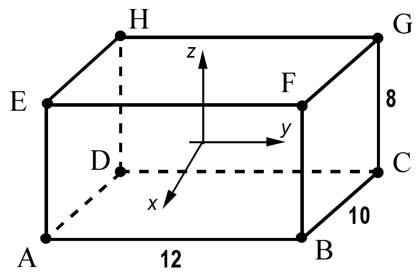
☐A ☐B ☐C ☐D ☐E ☐F



Ex. 2) O paralelepípedo ao lado está alinhado com os eixos coordenados, com a origem (0,0,0) em seu centro.

(a) Escreva as coordenadas cartesianas (x,y,z) dos vértices A, B, C, D, E, F, G e H.

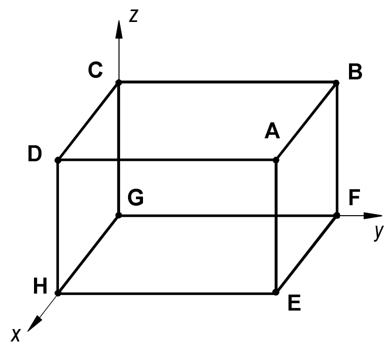
(b) Escreva as coordenadas cartesianas (x,y,z) dos centros de cada uma das seis faces.



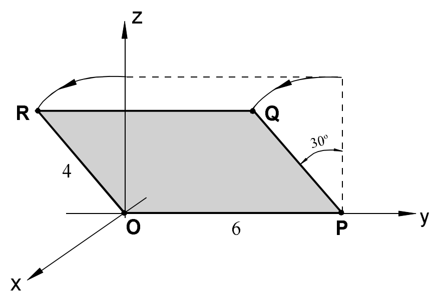
Ex. 3) O paralelepípedo ao lado está alinhado com os eixos coordenados, e a origem (0,0,0) está no ponto **G**. A diagonal AG mede 80cm e faz um ângulo de 65º com o eixo z. A distância do ponto **A** ao eixo y é de 35cm.

(a) Encontre as coordenadas cartesianas (x,y,z) dos pontos A, D e E.

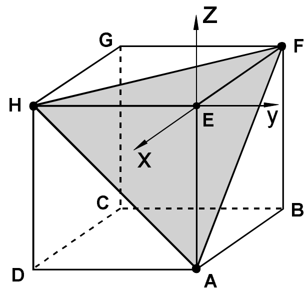
(b) Calcule o volume do paralelepípedo, em litros, com 3 significativos.



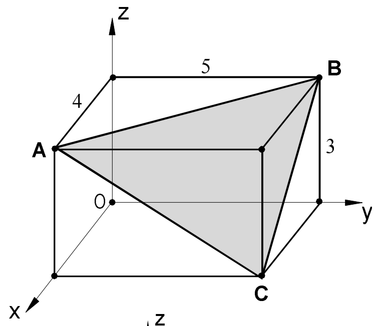
Ex. 4) Na figura ao lado, o retângulo OPQR, inicialmente contido no plano yz, foi girado de 30° em torno do eixo y, no sentido indicado. (a) Quais as coordenadas cartesianas do ponto Q ? (b) Qual a distância do ponto Q à origem O ? *(respostas com três significativos)*



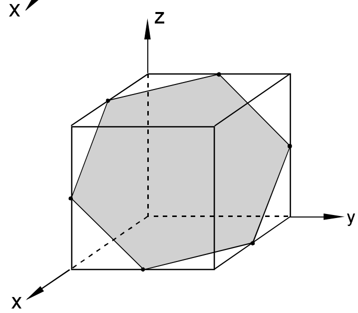
PLANOS



Ex. 5) Em relação ao sistema de coordenadas xyz, com origem (0,0,0) no ponto **E**, o plano **AHF** corresponde ao gráfico da função $f(x,y) = -4x-3y-12$.
Obtenha o volume do paralelepípedo **ABCDEFGH**.



Ex. 6) Obtenha **a**, **b** e **c** de modo que $f(x,y) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}$ represente o plano que passa pelos pontos A, B e C.
O ponto O(0,0,0) é a origem dos eixos coordenados.



Ex. 7) Unindo-se os pontos médios das 6 arestas de um cubo, obtém-se um hexágono regular, conforme mostra a figura ao lado. Obtenha a função f(x,y) cujo gráfico é o plano que contém esse hexágono. Suponha que o cubo tem aresta 1, e que a origem (0,0,0) está no ponto de cruzamento dos eixos x,y e z na figura.

SUPERFÍCIES E CURVAS DE NÍVEL

Ex. 8) Esboçar as curvas de nível da função $f(x,y) = 2000-x^2-y^2$ nos valores 0, 500, 1000, 1500 e 2000.

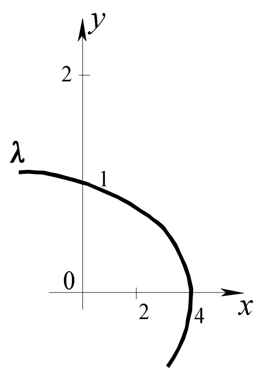
Ex. 9) Esboçar as curvas de nível da função $f(x,y) = 2000-x^2-5y^2$ nos valores 0, 500, 1000, 1500 e 2000.

Ex. 10) Esboce as curvas de nível da função $f(x,y) = \dfrac{y-1}{x+2}$ nos valores 0, -1, 1/2 e 2.

Note que f(x,y) não é definida para $x = -2$.

Ex. 11) Determine os valores de **A** e **B** para que a reta $y = 2x$ seja uma curva de nível de $f(x,y) = \mathbf{A}x^2 - 6y^2 + \mathbf{B}$ no valor 5.

Ex. 12) Determine os valores de A e B para que a curva λ seja uma curva de nível no valor 16 de $f(x,y) = Ax^2 + By^2 + xy$.



Ex. 13) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2x}{y+2}$. Suponha que x e y variem com o tempo t, segundo a regra

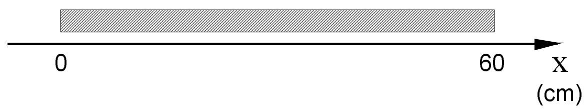
$\begin{cases} x = t+1 \\ y = at+b \end{cases}$. Qual deve ser o valor das constantes a e b para que o ponto P(x,y) ande sobre a curva de nível f(x,y) = 2 à medida que t varia ?

Ex. 14) (a) Determine o valor do parâmetro A para que a função $f(x,y) = Axy - 6y^2 + 5$ seja constante sobre a reta y = 2x.

(b) Nas condições do ítem (a), qual o maior valor que f(x,y) assume sobre a reta y = 3x?

DERIVADAS PARCIAIS

Ex. 15) A temperatura ao longo de uma barra varia com o tempo de acordo com:



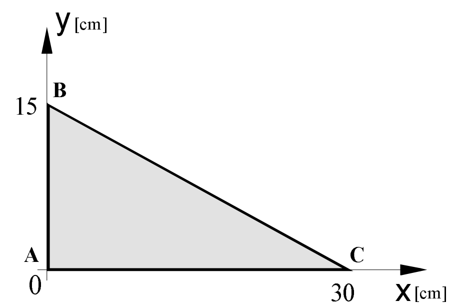
$$T(x,y) = 2(x-30)e^{-t/30} + 90 \qquad \begin{cases} x \text{ em cm} \\ t \text{ em minutos} \\ T \text{ em } ^{o}C \end{cases}$$

(a) Verifique se existem pontos da barra cujas temperaturas não variam com o tempo.
(b) Qual o perfil de temperatura da barra no instante t=0?
(c) Qual o perfil de temperatura da barra após um tempo muito grande?
(d) Qual a taxa de variação da temperatura ao longo da barra, em ^{o}C/mm, na posição x=30cm, no instante t=1hora ? (*resposta com quatro significativos*)
(e) Qual a taxa de variação da temperatura com o tempo, em ^{o}C/min, na posição x=0, no instante t=1hora? (*resposta com quatro significativos*)

Ex. 16) A distribuição de temperatura na placa triangular ao lado obedece à equação :

$$T(x,y) = 500 + y(6y + 3x - 90)$$

(x,y) em cm , T em ^{o}C

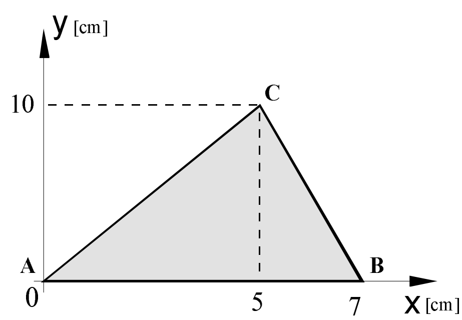


(a) Qual a temperatura nos vértices A, B e C ?
(b) Qual a temperatura nas arestas AB, AC e BC ?
(c) Qual a temperatura no ponto (10 ; 8) cm ?

Ex. 17) A distribuição de temperatura na placa triangular ao lado obedece à equação :

$$T(x,y) = 500 + 5(y - 2x)(y + 5x - 35)$$

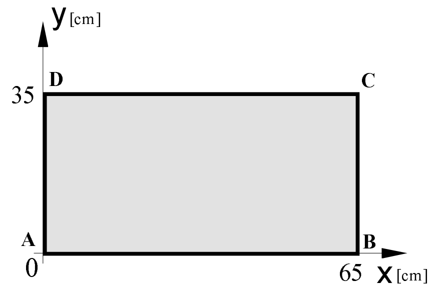
(x,y) em cm , T em ^{o}C



(a) Qual a temperatura nos vértices A, B e C ?
(b) Qual a temperatura nas arestas AB, AC e BC ?
(c) Verifique se o ponto (4 ; 6)cm pertence à placa; em caso afirmativo, qual a temperatura nesse local?

Ex. 18) A distribuição de temperatura numa placa retangular de 65cm X 35cm obedece à equação abaixo:

$$T(x,y) = \left(-\frac{400}{65}x + 200\right)\frac{y}{35} + \left(\frac{600}{65}x + 200\right) \qquad \begin{cases}(x,y) \text{ em cm} \\ T \text{ em } ^{o}C\end{cases}$$

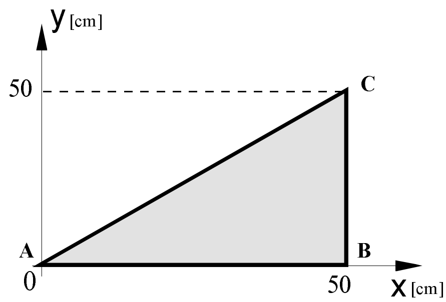


(a) Quais as temperaturas nos vértices A, B, C e D ?
(b) Quais as temperaturas nas arestas AB, BC, CD e AD ?
(c) Qual a temperatura no ponto (30 ; 15) cm ?
(d) Qual o gradiente de temperatura no ponto (30 ; 15) cm,
- na direção x ?
- na direção y ?

(e) Esboce as isotermas nos valores $300^{o}C$, $400^{o}C$, $500^{o}C$, $600^{o}C$ e $700^{o}C$.

Ex. 19) A distribuição de temperatura na placa triangular abaixo obedece à equação:

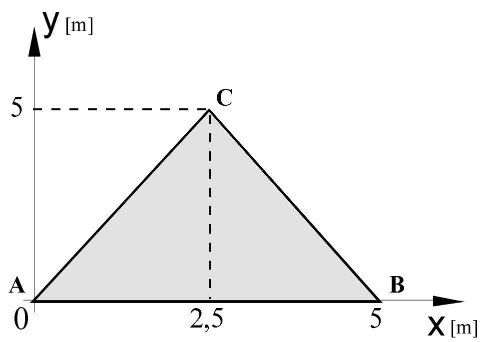
$$T(x,y) = \frac{2}{25}(x-y)^2 + 200 \qquad \begin{cases}(x,y) \text{ em cm} \\ T \text{ em } ^{o}C\end{cases}$$



(a) Quais as temperaturas nos vértices A, B e C ?
(b) Quais as temperaturas nas arestas AB, BC e AC ?
(c) Verifique se o ponto (25 ; 15)cm pertence à placa; em caso afirmativo, qual a temperatura nesse local?
(d) Qual o gradiente de temperatura no ponto (25 ; 15) cm,
- na direção x ?
- na direção y ?
(e) Esboce as isotermas nos valores $200^{o}C$, $250^{o}C$, $300^{o}C$, e $350^{o}C$.

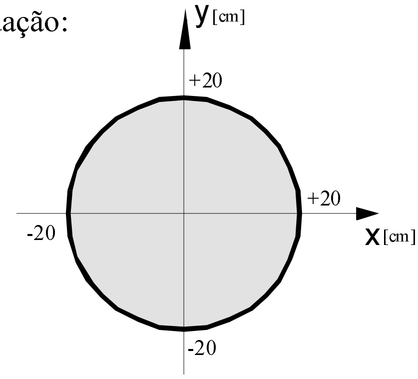
Ex. 20) A distribuição de temperatura na placa triangular abaixo obedece à equação:

$$T(x,y) = 400 - 10(y-2x)(y+2x-10) \qquad \begin{cases}(x,y) \text{ em metros} \\ T \text{ em } ^{o}C\end{cases}$$



(a) Quais as temperaturas nos vértices A, B e C ?
(b) Quais as temperaturas nas arestas AB, BC e AC ?
(c) Verifique se o ponto (3 ; 1)m pertence à placa;
em caso afirmativo, qual a temperatura nesse local?
(d) Qual o gradiente de temperatura, em $^{o}C/cm$, no ponto (3 ; 1) cm,
- na direção x ?
- na direção y ?

Ex. 21) A distribuição de temperatura na placa circular ao lado obedece à equação:



$$T(x,y) = 500e^{-\frac{x^2+y^2}{400}}$$

(x,y) em cm , T em °C

(a) Qual a temperatura na borda da placa ?
(b) Qual a temperatura no centro da placa ?
(c) Qual a temperatura no ponto (10 ; 15) cm ?
(d) Qual o gradiente de temperatura no ponto (10 ; 15) cm,
- na direção x ?
- na direção y ?
(e) Esboce as isotermas nos valores 400°C, 300°C, e 250°C.

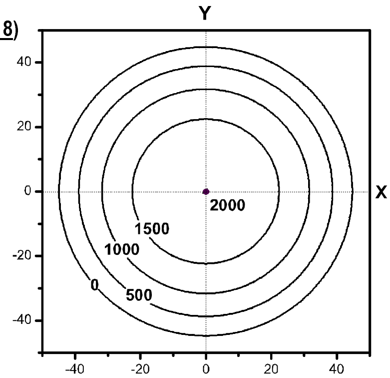
RESPOSTAS

Ex. 1: A **Ex. 2:** A(5,−6,−4) B(5, 6,−4) C(−5, 6,−4) D(−5,−6,−4) E(5,−6, 4) F(5, 6, 4) G(−5, 6, 4) H(−5,−6, 4)

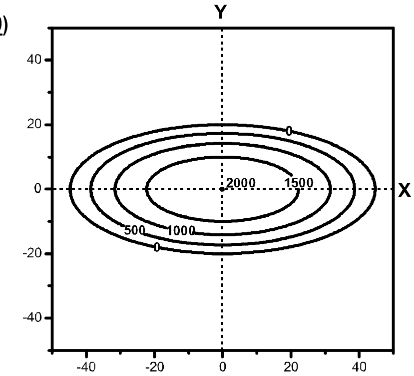
Ex. 3: (a) A(9,05; 71,9 ; 33,8)cm D(9,05; 0; 33,8)cm E(9,05; 71,9 ; 0)cm (b) 22,0 litros

Ex. 4: (a) (2,00 ; 6,00 ; 3,46) (b) 7,21 **Ex. 5:** 144 **Ex. 6:** **a** = −3/4 **b** = −3/5 **c** = 6 **Ex. 7)** f(x,y) = −x − y + 3/2

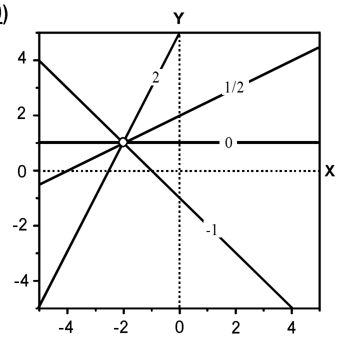
Ex. 8)



Ex. 9)



Ex. 10)



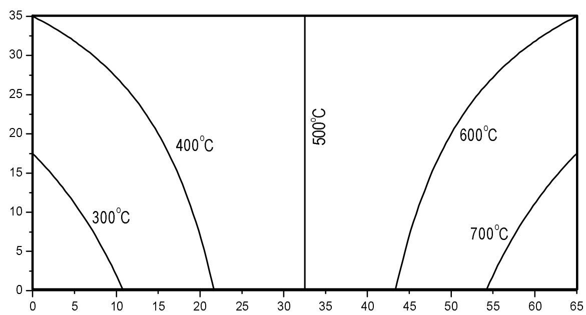
Ex. 11) **A** = 24 **B** = 5 **Ex. 12)** A = 1 B = 16 **Ex. 13)** a = 1 b = −1 **Ex. 14)** (a) A = 12 (b) 5

Ex. 15) (a) Sim, na posição x=30cm a temperatura permanece fixa = 90°C (b) T(x,0) = 2x+30 (cm, °C) (c) $T(x,\infty) = 90$°C
(d) 0,02707 °C/mm (e) 0,2707 °C/min

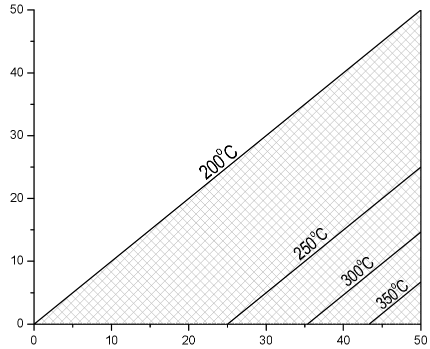
Ex. 16) (a) $T_A = T_B = T_C = 500$°C (b) $T_{AB} = 500 + y(6y-90)$ [cm, °C] $T_{AC} = 500$°C $T_{BC} = 500$°C (c) 404°C

Ex. 17) (a) $T_A = T_B = T_C = 500$°C (b) $T_{AB} = 500 - 50x(x-7)$ [cm, °C] $T_{AC} = 500$°C $T_{BC} = 500$°C (c) sim; 590°C

Ex. 18) (a) $T_A = 200$°C $T_B = 800$°C $T_C = 600$°C $T_D = 400$°C
(b) $T_{AB} = T(x,0) = (600/65)x+200$ [cm, °C] $T_{BC} = T(65,y) = (-200/35)y+800$
$T_{CD} = T(x,35) = (200/65)x+400$ $T_{AD} = T(0,y) = (200/35)y+200$
(c) T(30,15) = 483,5°C (d) $T_x(30,15) = 6{,}59$°C/cm ; $T_y(30,15) = 0{,}440$°C/cm (e)

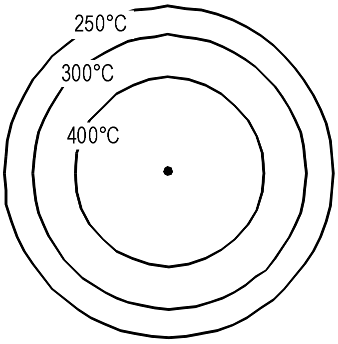


Ex. 19) (a) $T_A = 200$°C $T_B = 400$°C $T_C = 200$°C
(b) $T_{AB} = (2/25)x^2+200$ [cm, °C] $T_{AC} = 200$°C $T_{BC} = (2/25)(50-y)^2+200$
(c) sim; 208°C (d) $T_x(25,15) = 1{,}6$°C/cm ; $T_y(25,15) = -1{,}6$°C/cm (e)



Ex. 20) (a) $T_A = 400°C$ $T_B = 400°C$ $T_C = 400°C$ (b) $T_{AB} = 400+40x(x-5)$ [m, ºC] $T_{AC} = 400°C$ $T_{BC} = 400°C$
(c) sim; 250ºC (d) $T_x(3,1) = 0,4°C/cm$; $T_y(3,1) = 0,8°C/cm$

Ex. 21) (a) 183,9ºC (b) 500ºC (c) 221,9ºC
(d) $T_x(10,15) = -11,1°C/cm$; $T_y(10,15) = -16,6°C/cm$ (e)



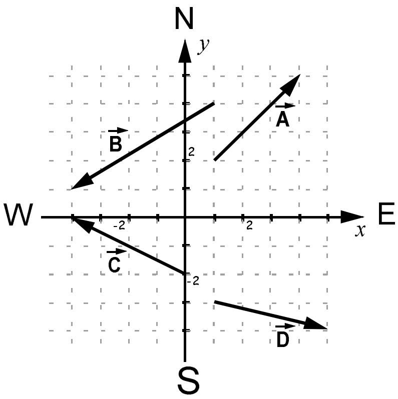
VETORES E DERIVADAS DIRECIONAIS

Ex. 22) Para cada um dos vetores representados na figura ao lado,

(a) escreva o mesmo utilizando as suas componentes em relação aos versores nas direções x ($\hat{\mathbf{i}}$) e y ($\hat{\mathbf{j}}$);

(b) escreva sua direção em relação à rosa dos ventos. Especifique os ângulos que forem fracionados em graus e minutos.

(c) escreva um versor na direção desse vetor.



Respostas: (a) $\vec{A} = 3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$; $\vec{B} = -5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}$; $\vec{C} = -4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$; $\vec{D} = 4\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$

(b) 45°NE ; 59°2'SW ; 63°26'NW ; 75°58'SE

(c) $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$; $\hat{b} = \frac{\hat{B}}{\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}})$; $\hat{c} = \frac{\hat{C}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$; $\hat{d} = \frac{\hat{D}}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$

Ex. 23) Escreva um versor ao longo de cada uma das seguintes direções:

(a) 30°SE (b) 64°35'SW (c) 18°53'NW (d) 82°9'NE

(especifique as componentes com três significativos)

Respostas: $\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}$; $-0{,}903\hat{\mathbf{i}} - 0{,}429\hat{\mathbf{j}}$; $-0.324\hat{\mathbf{i}} + 0{,}946\hat{\mathbf{j}}$; $0{,}991\hat{\mathbf{i}} + 0{,}137\hat{\mathbf{j}}$

Ex. 24) Tomando o plano (x,y) no nível do mar, a altura H de uma montanha obedece à equação:

$$H(x,y) = 1500 - 4x^2 - y^2 \qquad \begin{cases} \text{H em metros} \\ (x,y) \text{ em km} \end{cases}$$

Suponha que o eixo x aponta para o Leste, e que o eixo y aponta para o Norte.
Um alpinista está sobre o ponto (-10 ; 20 ; 700).

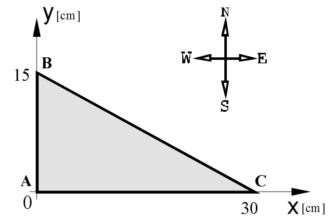
(a) Se o alpinista se mover para o Leste, ele vai descer ou subir? Com que taxa ?
(b) Se o alpinista se mover para o Norte, ele vai descer ou subir? Com que taxa ?
(c) Se ele se mover para 45^o NE, ele vai descer ou subir? Com que taxa ?
(d) Qual a inclinação local de subida na direção do topo?
(e) Qual a direção segundo a qual a subida é mais íngreme?
(f) Qual a declividade (inclinação máxima) local do terreno?
(g) Em que direção ele deve andar, de modo a manter-se na mesma altura?

(*respostas com três significativos, e ângulos em graus e minutos*)

Respostas:

(a) subir a 80,0m/km (4º34′) *(b) descer a 40,0m/km (2º17′)* *(c) subir a 28,3m/km (1º37′)* *(d) 71,6m/km (4º6′)*
(e) 63º26′SE *(f) 89,4m/km (5º7′)* *(g) 26º34′NE ou SW*

Ex. 25) A distribuição de temperatura na placa triangular ao lado obedece à equação $T(x,y) = 500 + y(6y + 3x - 90)$, com (x,y) especificado em centímetros e T em ^oC .



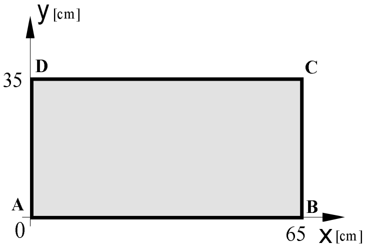
No ponto médio da aresta BC,

(a) qual o gradiente local de temperatura em direção à origem (0,0), em $^oC/mm$?
(b) qual o gradiente local de temperatura na direção 30^o SW, em $^oC/mm$?
(c) Qual o gradiente máximo de temperatura, e em que direção (para o interior da placa)?

(*respostas com três significativos, e ângulos em graus e minutos*)

Respostas: (a) –4,02ºC/mm (b) –5,02ºC/mm (c) –5,03ºC/mm na direção 26º34´SW

Ex. 26) A distribuição de temperatura numa placa retangular ao lado obedece à equação abaixo:



$$T(x,y) = \left(-\frac{400}{65}x + 200\right)\frac{y}{35} + \left(\frac{600}{65}x + 200\right) \qquad \begin{cases}(x,y) \text{ em cm}\\ T \text{ em } ^oC\end{cases}$$

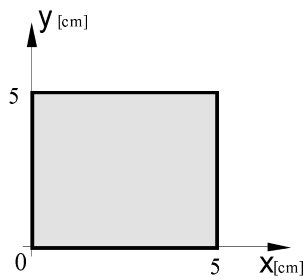
No vértice A, calcule

(a) A direção de variação máxima da temperatura, em $^oC/mm$;
(b) O gradiente de temperatura na direção do item anterior;
(c) O gradiente de temperatura na direção da diagonal AC.

(*respostas com três significativos, e ângulos em graus e minutos*)

Respostas: (a) a 31º46´ com o eixo x (b) 10,9ºC/cm (c) 10,8ºC/cm

Ex. 27) A distribuição de temperatura na placa retangular ao lado é dada por

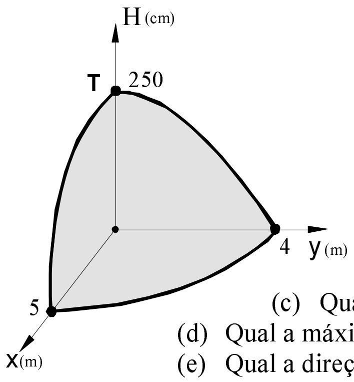


$$T(x,y) = -2x^2y + 10xy + 4x + 80 \qquad \begin{cases}(x,y) \text{ em cm}\\ T \text{ em } ^oC\end{cases}$$

Calcule a direção da isoterma a $121{,}25^o$ C que passa pelo centro da placa.

Resposta: 72º 15´ com o eixo x positivo, no sentido anti-horário.

Ex. 28) Um teto parabólico, esquematizado abaixo, é descrito pela equação:



$$H(x,y) = -10x^2 - 20y^2 + 10xy + \frac{70}{4}y + 250 \qquad \begin{cases}(x,y) \text{ em m}\\ H \text{ em cm}\end{cases}$$

A orientação da estrutura é tal que o eixo y aponta para o Norte e o eixo x para o Leste.

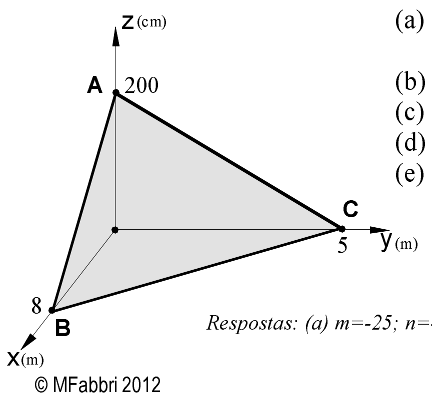
Considere o ponto P(4; 3; 82,5) sobre essa superfície.

(a) No ponto P, qual a inclinação local da superfície na direção Norte, em cm/m e em graus e minutos?
(b) Qual a inclinação local na direção Leste, em cm/m e em graus e minutos?
(c) Qual a inclinação local em direção ao topo **T** da estrutura, em cm/m e em graus e minutos?
(d) Qual a máxima inclinação local, no ponto P, em cm/m e em graus e minutos?
(e) Qual a direção de inclinação máxima, no ponto P?
(f) Qual a direção da curva de nível da estrutura que passa pelo ponto P?

(*respostas com três significativos, e ângulos em graus e minutos*)

Respostas: (a) –50,0cm/m (26º34´) (b) –62,5cm/m (32º0´) (c) 77,5cm/m (37º47´) (d) 80,0cm/m (38º40´) (e) 38º40´SW (f) 51º20´SE ou NW

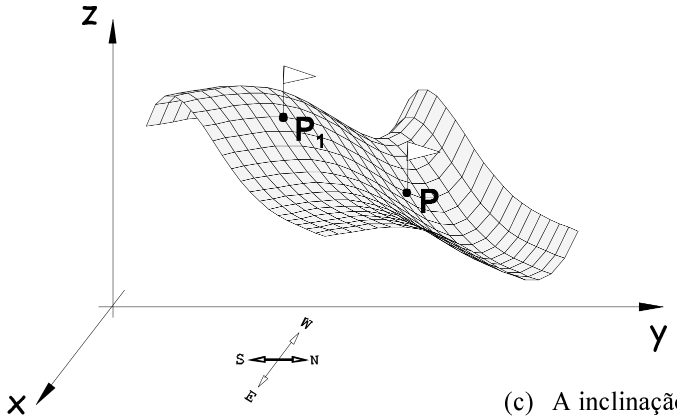
Ex. 29) Considere o plano que passa pelos pontos **A**, **B** e **C**. As distâncias horizontais estão em metros, e as alturas são medidas em centímetros.



(a) Lembrando que a equação do plano pode ser escrita como $z(x,y) = mx+ny+p$, determine os valores de m,n e p
(b) Qual a inclinação do plano na direção x positiva, em cm/m e em graus e minutos?
(c) Qual a inclinação do plano na direção y positiva, em cm/m e em graus e minutos?
(d) Qual a declividade (máxima inclinação) do plano, em cm/m e em graus e minutos?
(e) Para um observador que se encontra no ponto (2,3,30), qual a inclinação do plano, em graus e minutos, em direção a uma coluna fixada sobre o eixo z?

Respostas: (a) m=-25; n=-40; p=200 (b) –25cm/m (14º2´) (c) –40cm/m (21º48´) (d) –47,2cm/m (25º15´) (e) 47,1cm/m (25º15´)

Ex. 30) O perfil do terreno de um campo de golfe é descrito, aproximadamente, por



$$z(x,y)=200+\frac{x^2}{200}-\frac{y^2}{160}-\frac{3xy}{400}+3x-\frac{y}{4} \qquad \begin{cases}(x,y)\text{ em m}\\ z\text{ em cm}\end{cases}$$

O eixo y aponta para o Norte, e o eixo x para o Leste.

Obtenha, no ponto **P**(50; 60; 167,5),

(a) A inclinação do terreno, em minutos de grau, na direção Norte.
(b) A inclinação do terreno, em minutos de grau, na direção Leste.
(c) A inclinação do terreno, em minutos de grau, em direção ao ponto $\mathbf{P_1}$(30; 20; 201,5).

Respostas: (a) –47′ (b) 12′ (c) 37′

PONTOS CRITICOS; MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Ex. 31) Encontre e estude o ponto crítico da função $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy - 4x + 3y + 5$.

Ex. 32) Determinar os pontos críticos de cada uma das funções abaixo, e classificar cada um deles.

☐ mínimo local ☐ máximo local
☐ ponto de cela ☐ indeterminado

(a) $f(x) = 4xy^2 - 2x^2y - x$

(b) $f(x) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

(c) $f(x,y) = 2y^3 - 12xy + 3x^2 + 50$

(d) $f(x,y) = 2x^2 + 6xy + \dfrac{y^3}{4} + 15y$

(e) $f(x,y) = x^3/2 + 2y^3 - 24x - 6y + 20$

(f) $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 8xy + 10$

(g) $f(x,y) = x^3 + 2x^2y^2 + 8xy - 12x + 10$

RESPOSTAS

Ex. 31) Resposta

Ponto crítico: (1 , 2)

☐ máximo ☐ mínimo
☒ cela ☐ indeterminado

Ex. 32) (a) (0, ½) e (0, -½) ; ambos são pontos de cela
(b) (4,2) é ponto de mínimo local (4/3 , 2/3) é ponto de cela
(c) (0,0) e (-48,-24); ambos são pontos de cela
(d) (-3,2) é ponto de cela (-15,10) é mínimo local
(e) (16,-1) é ponto de cela (16,1) é mínimo local
(f) (0,0) é ponto de cela (4,-2) é mínimo local
(g) (0,3/2) é ponto de cela (-2,1) é ponto de cela (2,-1) é mínimo local

---