CÁLCULO DIFERENCIAL

2º Semestre de 2012

Prof. Maurício Fabbri

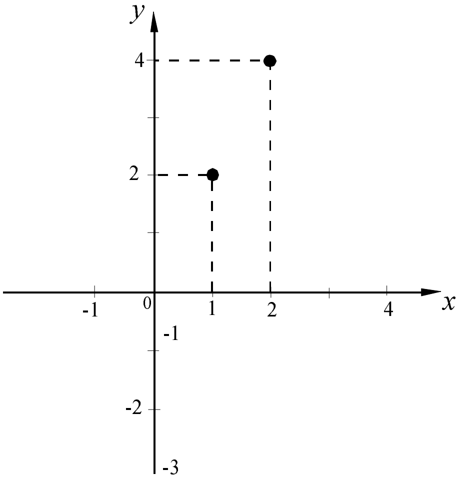
Roteiro de aula e 1ª Série de Exercícios

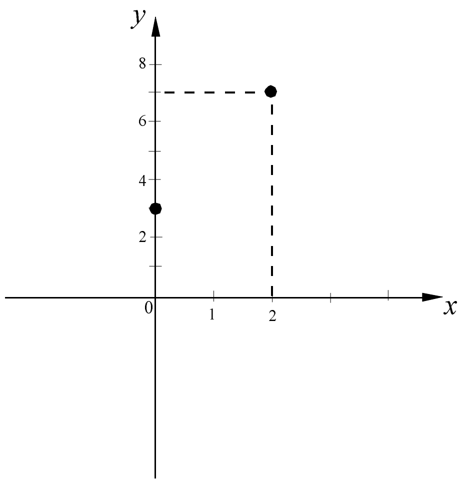
A função linear; regiões no plano; inclinação e taxas de variação

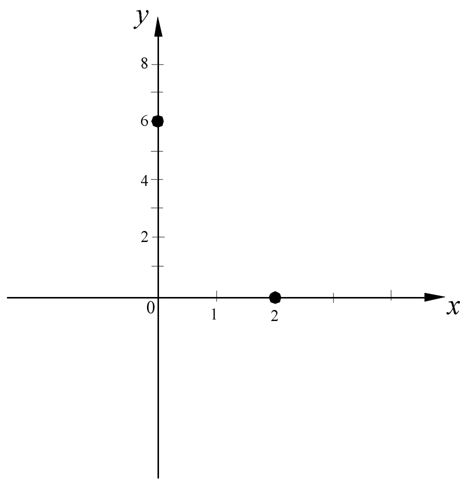
---

RETAS E REGIÕES NO PLANO

Escreva a equação da reta que passa pelos pontos marcados. A reta divide o plano em duas regiões. Defina essas regiões em termos das coordenadas *(x,y)* de seus pontos.







Exercício 1: Marque no plano (x,y) os pontos tais que

(a) $y = 3x + 1$ (b) $y < 2x + 1$ (c) $y \geq -2x + 3$ (d) $x < y \leq -2x + 4$

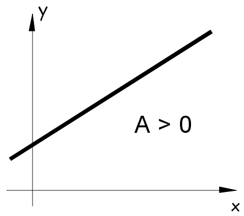
(e) $(x+1) \leq y \leq (7-x)$ e $x \geq 1$ (f) $(8 - x) \leq y \leq x$ e $y \geq (3x - 12)$

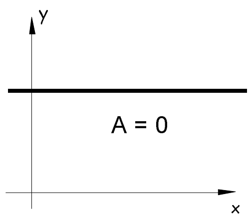
A EQUAÇÃO DA RETA (função linear)

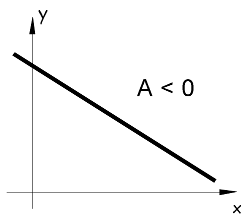
$$\boxed{y = Ax + B}$$

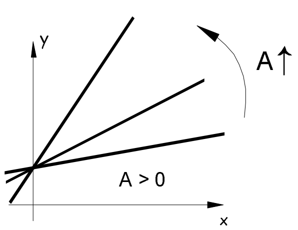
A = inclinação da reta (coeficiente angular)
B = ponto de zero (“offset”)

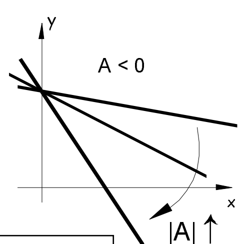
(se a reta for paralela ao eixo y, sua equação será $x = x_0$)



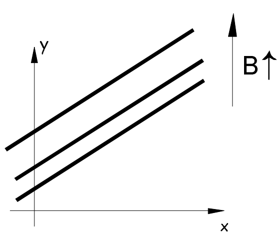




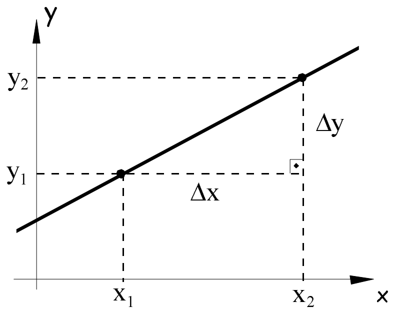




Se |A| aumenta, a reta varia mais rapidamente



Se B varia, mudamos apenas o “offset”

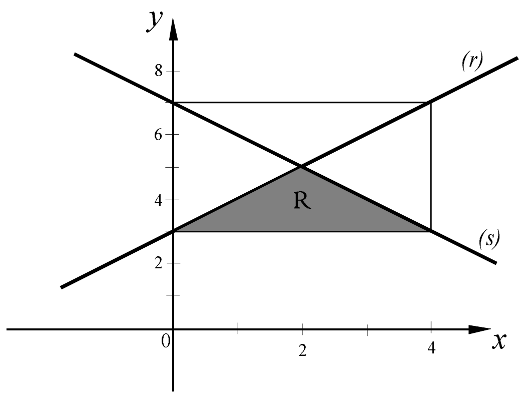


Se uma reta passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2),

sua inclinação será $\quad A = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

RETA DETERMINADA POR DOIS DE SEUS PONTOS

<u>Exercício 2</u>: Escreva as equações das retas *(r)* e *(s)*, e escreva um conjunto de relações entre *x* e *y* que defina a região sombreada R.



<u>Exercício 3</u>: Determine a equação da reta que passa pelos pontos: (a) (1,2) e (7,8) (b) (1,2) e (−1,4)

TAXAS CONSTANTES DE VARIAÇÃO

A reta modela uma taxa de variação constante

<u>Exercício 4</u>: A coluna de um termômetro de mercúrio tem 15cm de altura a 25^oC e 27cm a 35^oC. Supondo que a altura da coluna aumenta linearmente com a temperatura,

(a) Escreva a fórmula que dá a altura da coluna de mercúrio em função da temperatura;
(b) Qual será a altura da coluna quando a temperatura for de 43 ^oC ?
(c) Qual a temperatura em que a altura da coluna é de 20cm ?
(d) Se a escala do termômetro tiver um total de 80cm de comprimento, quais as temperaturas máxima e mínima que ele será capaz de medir?

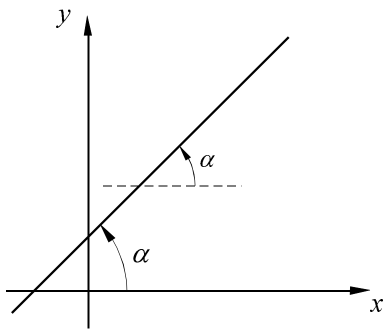
<u>Exercício 5</u>: O gradiente de temperatura ao longo de uma barra de Alumínio de 2,5m de comprimento é de $1{,}8^oC/cm$. A temperatura da extremidade fria é 80^oC.

(a) Qual a temperatura na extremidade quente?
(b) Escreva a fórmula que dá a temperatura em uma posição da barra em função da distância à extremidade fria. *(suponha que a extremidade fria está na posição 0)*
(c) Qual a temperatura no meio da barra?
(d) Em que posição a temperatura é de 250^oC?

<u>Exercício 6</u>: O rebanho de um fazendeiro A conta com quinhentas cabeças, e cresce à razão de cinquenta cabeças por ano. Já o rebanho de outro fazendeiro B conta com mil cabeças, mas cresce apenas à razão de vinte cabeças por ano. Supondo que essas taxas de crescimento se mantenham, depois de quanto tempo os dois rebanhos terão o mesmo tamanho? Quantas cabeças teríamos então em cada rebanho?

Exercício 7: Um recipiente contém mil litros de água, mas está aberto e a água evapora à taxa de cinco litros por dia. Em outro recipiente, há duzentos litros de solvente, que absorve água da atmosfera, de modo que seu volume aumenta à taxa de dois litros por dia. Se essas taxas permanecerem fixas, depois de quanto tempo os dois recipientes terão o mesmo volume de líquido? Nesse instante, quantos litros teríamos em cada recipiente?

INCLINAÇÃO E TRIGONOMETRIA



A = tan(α) = inclinação da reta (coeficiente angular)
= taxa de variação

Exercício 8: Esboce no plano cartesiano retas que passem pelo ponto (2,1) e tenham inclinações

(a) 0, 1, 2, 5, 10 e 20
(b) −2 e 2
(c) 2 e −1/2
(d) 0 e ∞

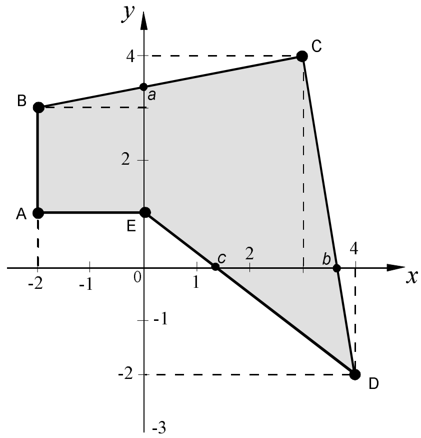
A EQUAÇÃO DA RETA NA FORMA GERAL

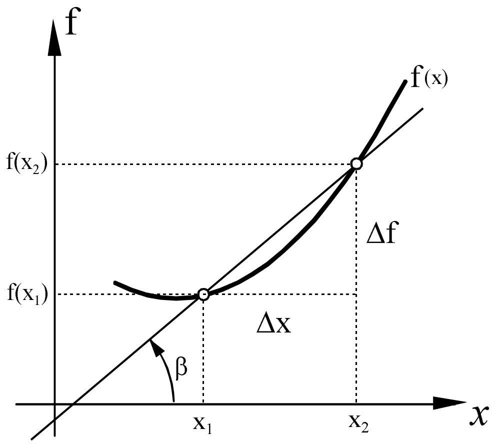
Qualquer reta no plano (x,y) pode ser descrita por uma relação do tipo

$$\boxed{ax+by+c = 0}$$

- se a reta for paralela ao eixo y, teremos b=0
- se a reta for paralela ao eixo x, teremos a=0
- se c = 0, a reta passa pela origem (0,0)
- nessa forma, a inclinação da reta será –a/b

Exercício 9: (a) Encontre a equação das retas suportes de cada uma das arestas do polígono ABCDE.
(b) Escreva um conjunto de relações entre *x* e *y* que defina o interior do polígono.
(c) Encontre as coordenadas dos pontos *a*, *b* e *c*.
(d) Calcule a área do polígono.





O *incremento* de $f(x)$ entre x_1 e x_2 é

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

A *taxa média de variação* de $f(x)$ entre x_1 e x_2 é

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \tan(\beta)$$

NOTE que essa taxa média <u>depende</u> dos pontos escolhidos.

A taxa média é igual à inclinação da secante que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

<u>Exercício 10</u>: (a) Encontre a inclinação da secante à parábola $y = x^2$ que passe pelos pontos (1,1) e (2, 4).
(b) Idem, pelos pontos (1,1) e (1,5 ; 2,25).

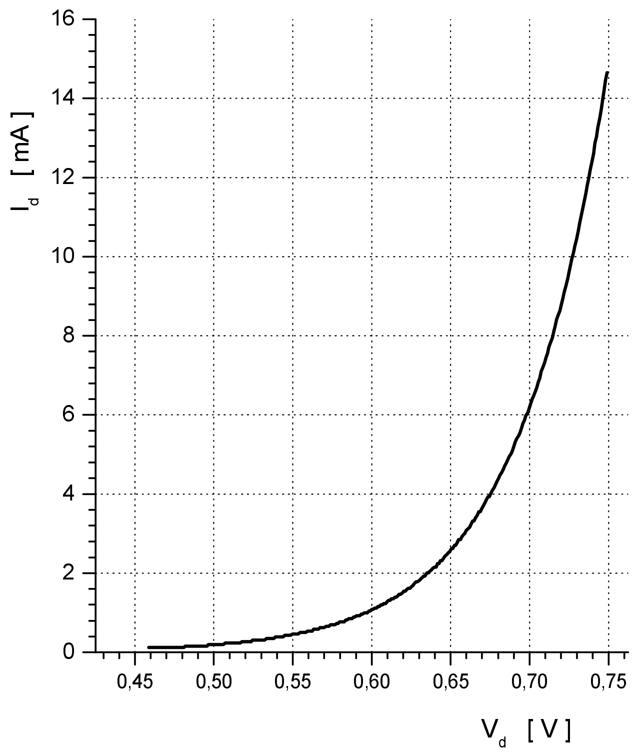
<u>Exercício 11</u>: (a) Encontre a inclinação da secante ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 9$ pelos pontos com abscissas $x = 0$ e $x = 3$.
(b) Idem, pelos pontos com abscissas $x = 0$ e $x = 2$.
(c) Idem, pelos pontos com abscissas $x = 2$ e $x = 3$.

<u>Exercício 12</u>: A curva característica de um determinado diodo de silício, com polarização direta, é mostrada ao lado.

(a) Encontre a inclinação da reta secante a essa curva que passa pelos pontos com correntes de 2 mA e 10mA.

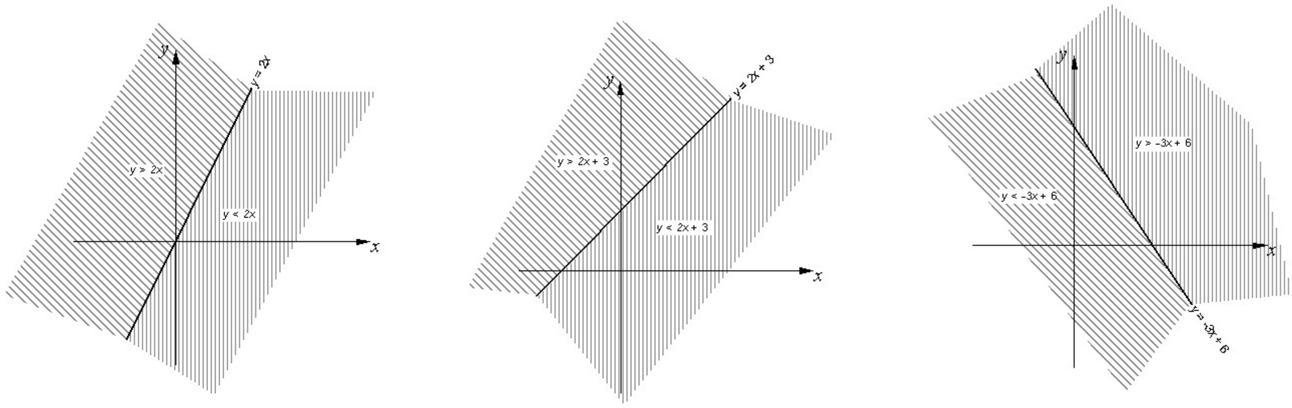
(b) Idem, pelos pontos com tensões de 0,6V e 0,7V.

Respostas com dois significativos.

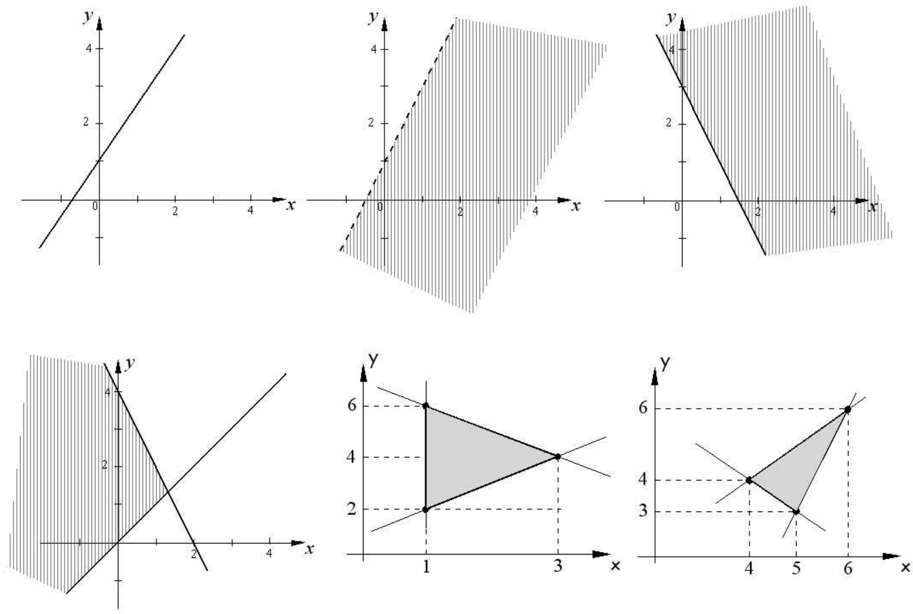


<u>Exercício 13</u>: (a) Encontre a inclinação da secante à parábola $y = x^2$ que passe pelos pontos (1,1) e $((1+\delta), (1+\delta)^2)$, para $\delta = 1, 0{,}5, 0{,}01$ e $0{,}001$.
(b) qual deve ser a inclinação da tangente à parábola $y = x^2$ pelo ponto (1,1) ?
(c) aplique a mesma técnica para encontrar a inclinação da tangente ao gráfico da função $y = x^3$ pelo ponto (1,1).

RESPOSTAS



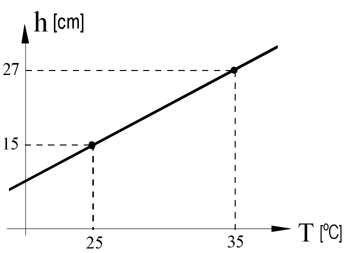
1.



2. *(r)* y = x + 3 *(s)* y = −x + 7 $R\begin{cases} y \le x+3 \\ y \le 7-x \\ y \ge 2 \end{cases}$

3. (a) y = x + 1 (b) y = 3 − x

4. (a)



h = AT + B

$$A = \frac{\Delta h}{\Delta T} = \frac{27-15}{35-25} = 1{,}2\ \text{cm}/^{o}\text{C}$$

h = 1,2T + B

15 = 1,2(25) + B ⇒ B = −15

$$\boxed{h = 1{,}2T - 15 \quad \begin{cases} T\ \text{em}\ ^{o}\text{C} \\ h\ \text{em cm} \end{cases}}$$

(b) h(43ºC) = 1,2(43)−15 = 36,6cm

(c) 20 = 1,2T−15 ⇒ T = 29,2ºC

(d) no mínimo, teremos h = 0 ⇒ 0 = 1,2T − 15 ⇒ T_{min} = 12,5ºC

no máximo, teremos h = 80cm ⇒ 80 = 1,2T − 15 ⇒ T_{max} = 79,2ºC

5. (a) como a temperatura varia 1,8ºC em cada cm, e a barra tem 2,5m = 250cm, segue que a temperatura na extremidade quente é de 1,8×250 = 530ºC.

(b) posicionando a barra de modo que a extremidade fria esteja em x = 0 e que a extremidade quente esteja ao longo do eixo x e na direção de x positivo, teremos

$$T = 1{,}8x + 80 \quad \begin{cases} x\ \text{em cm} \\ T\ \text{em}\ ^{o}\text{C} \end{cases}$$

(c) como a variação é linear, a temperatura no meio da barra pode ser encontrada por uma média aritmética simples (ou seja, a temperatura no meio é o “meio” da temperatura…):

$$T_M = \frac{530+80}{2} = 305^o\,C$$

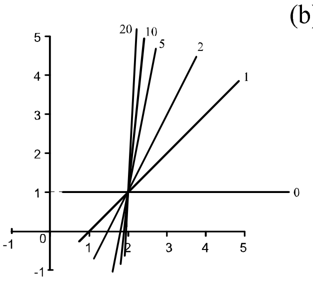
(confira que o resultado é o mesmo se voce utilizar a equação encontrada no item anterior)

(d) 94,4cm

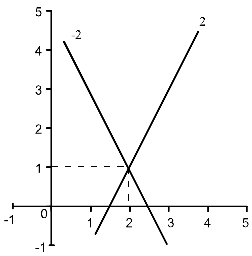
6. 16anos e 8 meses ; cerca de 1330 cabeças

7. 114 dias e 7 horas ; 429 litros

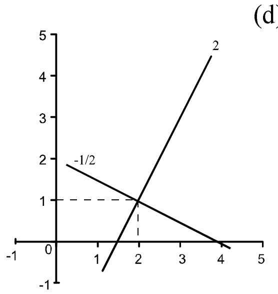
8. (a)



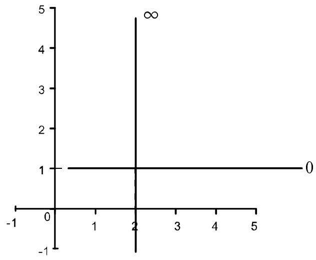
(b)



(c)



(d)

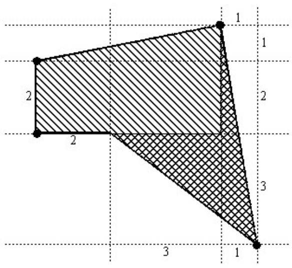


9. (a) $\overline{AB} : x = -2 \quad \overline{BC} : y = \frac{x+17}{5} \quad \overline{CD} : y = -6x+22 \quad \overline{DE} : y = -\frac{3}{4}x+1 \quad \overline{EA} : y = 1$

(b) $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq \frac{x+17}{5} \\ y \leq -6x+22 \\ y \geq -\frac{3}{4}x+1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

(c) a : y = 17/5 = 3,4
b : x = 22/6 ≅ 3,7
c : x = 4/3 ≅ 1,3

(d)



área = 1 trapézio + 1 retângulo + 1 quadrado
– 1 metade do retângulo
– metade de outro retângulo

= 5× (2+3) /2 + 1×6 + 3×3 – (1×6)/2 – (4×3)/2 =
27/2 = 13,5

10. (a) 3 (b) 2,5

11. (a) 1 (b) 0 (c) 3

12. (a) 89mA/V = 89mΩ (b) 51mA/V = 51mΩ

13. (a) 3 ; 2,5; 2,01 ; 2,001 (b) 2 (c) 3