# ELETROMAGNETISMO

1º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri



## Campo elétrico e a lei de Gauss

### Leitura e Exercícios

O CAMPO ELÉTRICO

*(I)* O conceito de campo (em inglês, *field*) é um dos mais úteis já inventado na física. Imaginamos que cargas elétricas produzem um campo elétrico no espaço ao redor das mesmas, de modo que uma "carga de prova" colocada nessa região do espaço vai sentir o efeito desse campo. (assim como massas produzem um campo gravitacional ao redor das mesmas, que podem agir sobre outras massas). Matematicamente, um campo é uma função da posição numa certa região do espaço, e os princípios da física nos ensinam como calcular essa função.

*(II)* Dizemos que existe um campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto P do espaço se uma carga de prova q colocada nesse ponto ficar sujeita a uma força elétrica $\vec{F}$. Se a carga de prova for suficientemente pequena, ela não perturba as cargas que produzem o campo, e nesse caso supomos que a força sobre a carga de prova q é proporcional ao valor de q. O campo elétrico que existe no ponto P pode então ser medido pela relação:

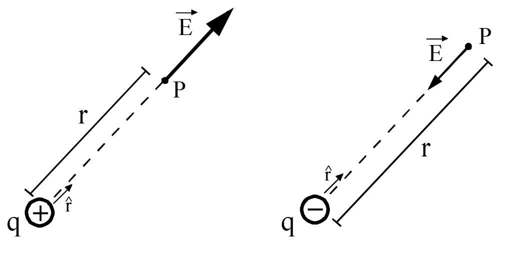
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad (q \to 0)$$

A unidade de campo elétrico, no SI, é N/C (Newton/Coulomb).

→ *Observe que a relação acima envolve dois vetores e um valor escalar q com sinal.*
*A força que aparece numa carga de prova negativa está no sentido contrário ao campo nesse ponto.*

**Exercício 1**: Calcule o campo elétrico que uma carga de 2μC produz a uma distância de 5cm, no vácuo. *(dois significativos)*. *Resp.: $7{,}2\times10^{6}$ N/C*

*(III)* Usando a definição acima, e a Lei de Coulomb, podemos calcular diretamente o campo elétrico que uma carga pontual q produz em um ponto a uma distância r da mesma:




$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Entenda bem a notação usada na fórmula acima:

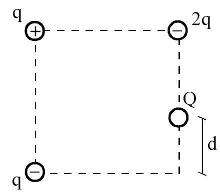
r é o valor da distância do ponto P à carga q.
$\hat{r}$ é um vetor de módulo 1 que aponta da carga para o ponto P.
q é o valor da carga que produz o campo $\vec{E}$ (com sinal).

Se a carga q é positiva, o campo que ela produz em seu redor aponta radialmente para "fora" da mesma. Se a carga q é negativa, o campo que ela produz em seu redor aponta radialmente para ela mesma. O valor E do campo produzido pela carga pontual diminui com o quadrado da distância à carga.

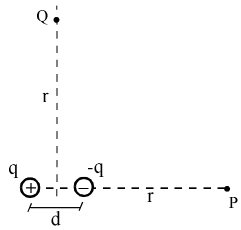
*(IV)* Se o campo elétrico é produzido por várias cargas, vale o princípio da superposição:

- O campo produzido por uma carga não depende da presença das outras.
- O campo total é igual à soma (vetorial) de todos os campos.

**<u>Exercício 2</u>:** A figura mostra um quadrado de lado 10cm. O valor de q é 25μC. Qual o sinal, o valor e a posição d da carga Q para que o campo elétrico no centro do quadrado seja zero? *(dois significativos)*.
*Resp.: positiva, de 35μC, no ponto médio da aresta (d = 5cm)*

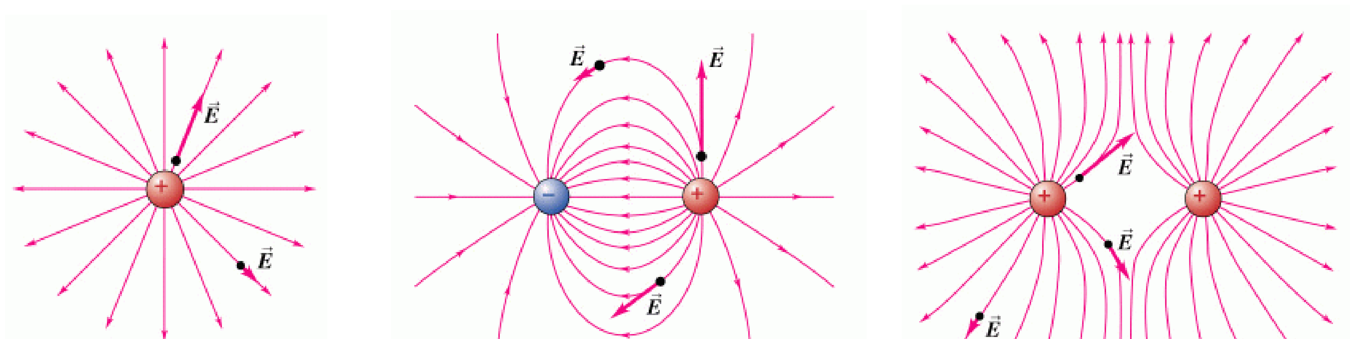



**<u>Exercício 3</u>:** *(campo produzido por um dipolo elétrico)* Um dipolo elétrico consiste em duas cargas simétricas q e −q separadas por uma distância d. O momento do dipolo é definido como o vetor $\vec{p} = q\vec{d}$, onde $\vec{d}$ é o vetor de tamanho d que liga a carga negativa à carga positiva. Mostre que, se r >> d, o campo elétrico nos pontos P e Q são dados por $\vec{E}_P = \dfrac{2K\vec{p}}{r^3}$ e $\vec{E}_Q = -\dfrac{K\vec{p}}{r^3}$.




*(V)* As <u>linhas de campo</u> permitem visualizar o campo elétrico em uma região do espaço. Elas são construídas de modo que

- são tangentes ao campo elétrico em cada ponto
- são mais densas nas regiões onde o campo é mais forte
- seguem o sentido do campo, isto é, "saem" das cargas positivas e "entram" nas cargas negativas



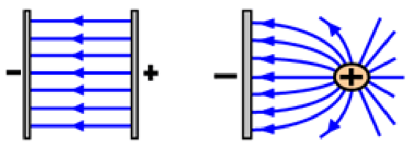
http://www.physics.miami.edu


*Note que a linha de campo que passa por um ponto P é a trajetória seguida por uma pequena carga de prova positiva abandonada nesse ponto (supondo que a massa dessa carga de prova seja muito pequena).*

*(VI)* Os condutores metálicos possuem elétrons que se movem facilmente dentro dos mesmos, e por isso,

- o campo elétrico no interior de um bom condutor é zero, e
- o campo elétrico na superfície de um bom condutor é perpendicular a essa superfície em cada ponto da mesma.

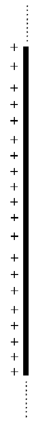
Observe as linhas de campo nas figuras abaixo, onde cargas estão distribuídas sobre placas metálicas:



*http://www.iop.org*

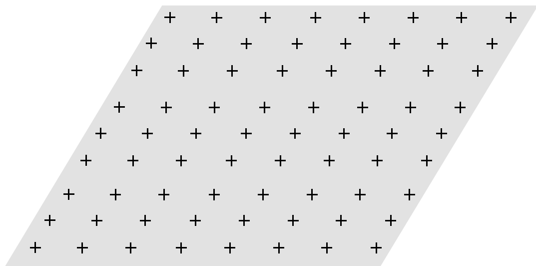
*(VII)* Usando o princípio da superposição, podemos visualizar como devem ser as linhas de campo elétrico ao redor de corpos carregados que tem formas geométricas simples.

**Exercício 4:** Como devem ser as linhas de campo elétrico ao redor de um fio retilíneo infinito, homogeneamente carregado?

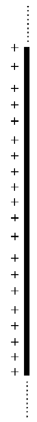


Visto de cima:

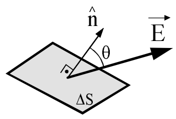
**Exercício 5:** Como devem ser as linhas de campo elétrico ao redor de um plano infinito, homogeneamente carregado?



Visto de perfil:



*(VIII)* O fluxo $\Delta\phi$ do campo elétrico através de uma pequena superfície $\Delta S$ é definido como o produto de $\Delta S$ pelo valor da componente normal do campo $\vec{E}$ sobre $\Delta S$. Na figura, $\hat{n}$ é um versor normal à pequena superfície $\Delta S$.




$$\Delta\phi = E(\Delta S)\cos\theta$$

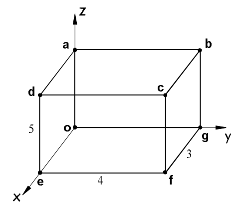
O fluxo é máximo quando o campo "atravessa" $\Delta S$ perpendicularmente, e é zero quando o campo é tangente a $\Delta S$.

Para calcular o fluxo total do campo sobre uma superfície grande S, dividimos a superfície S em pequenos elementos de área $\Delta S$, e em cada uma dessas áreas calculamos a quantidade $E.\ \Delta S.\cos\theta$, onde $\theta$ é o ângulo que o campo $\vec{E}$ faz com a normal ao elemento de área. O valor correto do fluxo é obtido quando fazemos $\Delta S \to 0$:

$$\Phi_E = \lim_{\Delta S\to 0}\sum_S E(\Delta S)\cos\theta = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS$$

Se a superfície S for fechada, escrevemos $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$. Nesse caso, a convenção é que, a normal em cada ponto de S aponta para fora do volume envolvido por S.

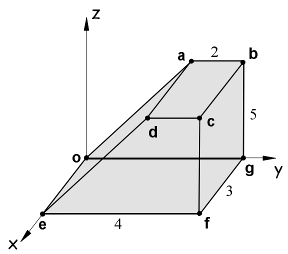
**<u>Exercício 6</u>:** O paralelepípedo abcdefgo está em uma região onde existe um campo elétrico $\vec{E}$ uniforme de 25N/C na direção x. Seja S a superfície fechada que envolve o paralelepípedo. Calcule o valor do fluxo de $\vec{E}$




(a) através de cada face de S
(b) através de S

**<u>Exercício 7</u>:** Repita o exercício anterior nos casos em que

(a) O campo uniforme $\vec{E}$ aponta na direção de z;
(b) $\vec{E} = 20(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}})$
(c) $\vec{E} = 20(\hat{\boldsymbol{i}} - \hat{\boldsymbol{k}})$




**<u>Exercício 8</u>:** Repita o exercício 6 para o volume abcdefgo ao lado.

**<u>Exercício 9</u>:** Imagine que S é uma superfície esférica de raio 25cm ao redor de uma carga pontual de 30μC. Qual o fluxo do campo elétrico produzido pela carga através de S?

*(IX)* Como o campo elétrico produzido por uma carga pontual tem simetria esférica, escreve-se a Lei de Coulomb na forma

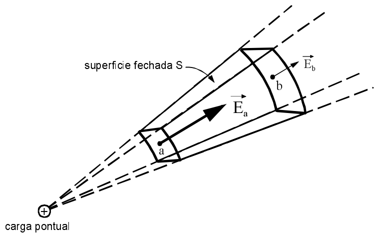
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

ε é chamado de permitividade elétrica do meio onde a carga se encontra. A permitividade elétrica do vácuo é $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$ no SI, e temos $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9\times10^{9}$. A permitividade elétrica do ar seco é praticamente a mesma que a do vácuo.

Com isso, o fluxo do campo elétrico produzido por uma carga pontual q através de uma superfície esférica que envolve q será simplesmente q/ε .

*(X)* *(A Lei de Gauss)* Devido ao fato do campo elétrico produzido por uma carga pontual diminuir com o quadrado da distância à carga, e de que o campo devido a uma distribuição de cargas é a soma dos campos que cada uma das cargas produz, o valor do fluxo elétrico através de uma superfície fechada só depende do valor das cargas que estão no interior da superfície.

Isso pode ser visto através das figuras baixo (retiradas das aulas de física de Feynman):



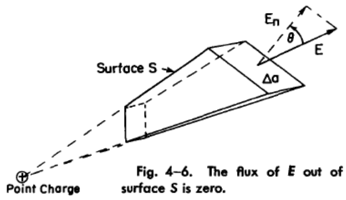




**Fig. 4–6.** The flux of **E** out of the surface S is zero.

1. O fluxo do campo produzido pela carga pontual através de S é zero, porque a área das tampas aumenta com $r^2$ e o campo diminui com $r^2$. Na figura, o fluxo é positivo na tampa maior, negativo na tampa menor e zero nas paredes.

2. O fluxo será zero mesmo que as "tampas" de S estejam inclinadas, porque a componente normal do campo diminui com $\cos(\theta)$ mas a área da tampa aumenta com $\cos(\theta)$.

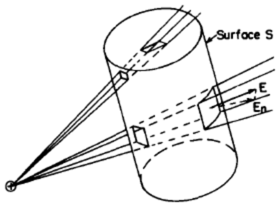



**Fig. 4–7.** Any volume can be thought of as completely made up of infinitesimal truncated cones. The flux of **E** from one end of each conical segment is equal and opposite to the flux from the other end. The total flux from the surface S is therefore zero.

3. O fluxo será zero através de qualquer superfície fechada, porque podemos decompor a superfície em pedaços parecidos com os da figura anterior.

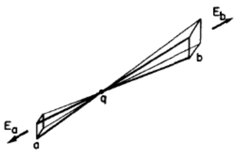



**Fig. 4–8.** If a charge is inside a surface, the flux out is not zero.

4. Se a carga q estiver dentro de S, o fluxo não será zero através de S. Na figura, o fluxo é positivo nas duas tampas.

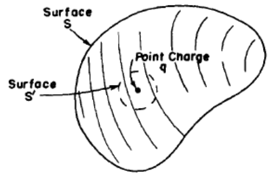



**Fig. 4–9.** The flux through S is the same as the flux through S'.

5. Se S´ é envolvida por S, o fluxo através de S é igual ao fluxo através de S´.

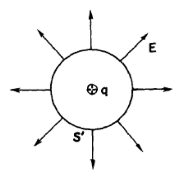



**Fig. 4–10.** The flux through a spherical surface containing a point charge q is $q/\epsilon_0$.

6. O fluxo através de uma superfície esférica S que enolve q é igual a $q / \varepsilon_0$.

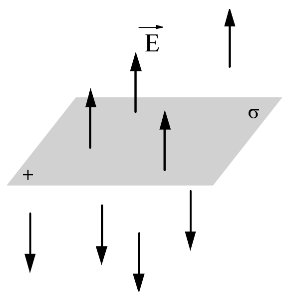
A LEI DE GAUSS

O fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é igual ao valor da carga elétrica total dentro dessa superfície dividido pela permitividade elétrica do meio:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Usando a Lei de Gauss, conseguimos rapidamente calcular o campo elétrico produzido por algumas distribuições geométricas simples de cargas:

1. O campo produzido por um plano infinito carregado homogeneamente:

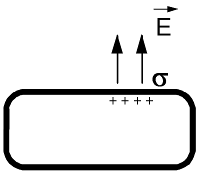



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$ *(uniforme em cada lado do plano)*

$\sigma$ = densidade superficial de carga ($C/m^2$)

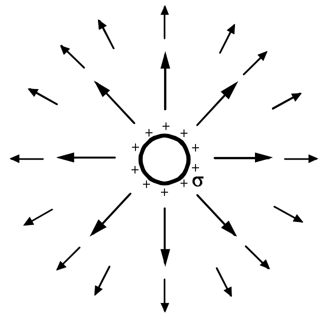
Note que, devido ao fato do plano ser infinito, o campo não diminui de intensidade à medida que nos afastamos dele. Em casos práticos, isso acontece enquanto estivermos suficientemente afastados das bordas do plano.

2. Campo bem próximo da superfície de um condutor:




No interior do condutor, o campo é zero.

Próximo da superfície, no exterior, o campo é $\frac{\sigma}{\varepsilon}$, onde σ é a densidade de carga superficial local no condutor.

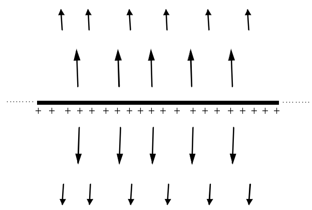



3. Campo produzido por uma casca esférica homogeneamente carregada

No interior da casca : $\vec{E} = zero$

Na superfície e no exterior: $\vec{E}$ é calculado como se toda a carga da casca estivesse concentrada em seu centro.

4. Campo produzido por fio retilíneo infinito, carregado homogeneamente com uma densidade linear de carga λ:



$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\frac{\lambda}{r}$$

O campo diminui linearmente com a distância r ao fio.

**Exercício 10:** Demonstre os quatro resultados acima.

**Exercício 11:** Qual a força que vai agir sobre uma carga pontual de 5μC colocada:

(a) próxima a um plano carregado homogeneamente com $20\mu C/cm^2$ ?
(b) a 8 cm do centro de uma casca esférica de raio 5cm carregada homogeneamente com $20\mu C/cm^2$ ?
(c) a 12cm de um fio bem comprido, carregado homogeneamente com 15μC/cm ?

**Exercício 12:** Uma esfera isolante, maciça, de raio R, está carregada com uma carga Q homogeneamente distribuída sobre todo o seu volume. Use a Lei de Gauss para calcular a intensidade do campo elétrico que essa distribuição de carga produz a uma distância r do centro da esfera.

**Exercício 13:** *(texto adaptado de http://www.cea.inpe.br/webdge/elat/ )* Em condições de tempo bom, o campo elétrico próximo à superfície da Terra é, em média, de 120 N/C sobre os continentes. Esse campo é devido à carga superficial na Terra, e, como essa carga é negativa, o campo elétrico é voltado para baixo. Este campo, em condições normais, é imperceptível em nossa vida. Isto é devido ao fato de que virtualmente todas as coisas, inclusive nosso corpo, são condutoras comparadas ao ar.

(a) Calcule a densidade superficial média de carga sobre os continentes. Use para permitividade elétrica do ar o mesmo valor que para o vácuo. *(dois significativos)*

(b) Lembrando que o raio da Terra é cerca de 6400Km, estime a carga total na superfície da Terra, supondo que toda ela esteja homogeneamente carregada. *(dois significativos)*

*Resp.: $1{,}1\times10^{-9}\ C/m^2$ ; $5{,}5\times10^{5}\ C$*

**Exercício 14:** O campo elétrico de ruptura do ar fica em torno de $10^6$ N/C (correspondente a 1 Megavolt por metro, ou 10KV por centímetro).

(a) Estime a carga máxima que pode ser distribuída sobre uma esfera de metal com 20cm de diâmetro, sem ionizar o ar próximo à sua superfície.

(b) Repita o cálculo se a esfera tiver apenas 2mm de diâmetro.

*Resp: 1,1μC ; 1,1 ηC*



**REFERENCIAS**

1. Amaldi, H. *Imagens da Física*, Scipione, 1995
2. http://www.cea.inpe.br/webdge/elat/
3. http://thunder.msfc.nasa.gov/primer
4. http://www.physics.sjsu.edu/becker/physics51/elec_charge.htm
5. http://historia.et.tudelft.nl/wggesch/geschiedenis/electricity/
6. Keller, F.J.; Gettys, W.E. e Skowe, M.J. *Física*, Vol.2, Makron, 1999
7. Purcell, E.M., Electricity and Magnetism (Berkeley Physics Course Vol. 2), 1965.
8. The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley, 1964.