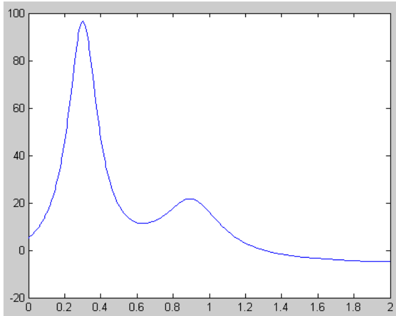
CÁLCULO NUMÉRICO E COMPUTACIONAL

1^o sem 2014

ZEROS E MAXIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES



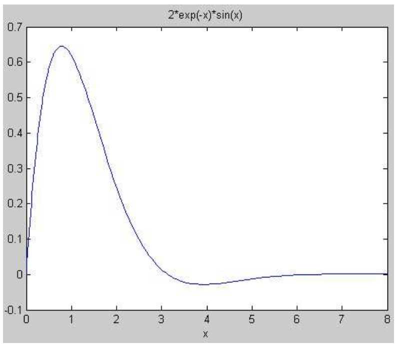
MATLAB 'humps' function

```
y = 1 ./ ((x-.3).^2 + .01) + 1 ./ ((x-.9).^2 + .04) - 6;
```

Y = HUMPS(X) is a function with strong maxima near x = .3 and x = .9.

```
>> fplot('humps',[0 2])
```

```
>> f='2*exp(-x)*sin(x)';
>> fplot(f,[0 8])
>> title(f),xlabel('x')
```




```
>> % root starting from one point
>> x0 = fzero(f,3)
x0 =    3.1416
>> x0 = fzero('humps',1.2)
x0 =    1.2995
```

The `fzero` command is a function file. The algorithm, created by T. Dekker, uses a combination of bisection, secant, and inverse quadratic interpolation methods. (veja Numerical Recipes, Sec. 9.3: Van Winjngaarden-Dekker-Brent method)

```
>> f1(6)
ans =   –0.0014
>> f1(7)
ans =    0.0012
>> % root starting from an interval
>> xint = [6 7];
>> x0 = fzero('f1',xint)
x0 =     6.2832
```

```
% ARQUVO f1.m

function y = f1(x)
y = 2*exp(-x)*sin(x);
```

FMINBND Single-variable bounded nonlinear function minimization.

X = FMINBND(FUN,x1,x2) attempts to find a local minimizer X of the function FUN in the interval x1 < X < x2.
FUN is a function handle. FUN accepts scalar input X and returns a scalar function value F evaluated at X.

```
>> xm = fminbnd('humps',0.3,1)
xm =    0.6370
```

PARA MAXIMIZAR UMA FUNÇÃO F(X), DEFINA G=–F E MINIMIZE G.

```
>> xm = fminbnd('h',0.2,0.4)
xm =    0.3004
```

```
% ARQUVO h.m

function y = h(x)
y = -1*humps(x);
```

EXERCÍCIOS:

1. Encontre os dois primeiros zeros positivos da função $e^{-x} - sen(\pi x/2)$.

   Resp.: 0.4436 e 1.9049

2. Faça um gráfico da função de Fraunhofer, $F = \left(\dfrac{sen\alpha}{\alpha}\right)^2$, no intervalo $-6 \le \alpha \le +6$. Encontre o valor de α para o qual F = ½.

   Resp.: 1.3916

3. Em um projeto de engrenagens helicoidais, é preciso resolver a equação $\tan\phi - \phi = c$. Encontre o ângulo ϕ para c = 0.01 e c = 0.001.

   Resp.: 0,3068 ; 0,1438 (17°35' e 8°14')

4. Em problemas de isolamento de alta tensão, é necessário minimizar a área transversal $Q = \pi q^2 \dfrac{(x^2-1)}{(\ln x)^2}$, onde q é constante. Qual é o valor do fator geométrico x que minimiza Q?

   Resp.: 2.2185

5. Encontre a raiz de $xe^x = 1$, com precisão de três significativos,
   i) usando bissecção, iniciando com o intervalo [0 1]; $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$ *Resp.: 0.567 (em 10 iterações)*
   ii) usando o método da posição falsa, iniciando com o intervalo [0 1];
   $x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \alpha x_{n-1}$ com $\alpha = \dfrac{|f_n|}{|f_n| + |f_{n-1}|}$ *Resp.: 0.567 (em 6 iterações)*
   iii) usando o método de Newton-Raphson, partindo do ponto x = 1.
   $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f_n}{f_n'}$ *Resp.: 0.567 (em 3 iterações)*
   iv) compare seu resultado com o obtido pelo MATLAB

```
% ARQUVO f.m

function y = f(x)
y = x*exp(x) - 1;
end
```

```
% ARQUVO bisec.m

EPS = 1e-3;
xa=0; xb=1;
fc=1;

i=0;
while abs(fc) > EPS
  i=i+1;
  xc = (xa+xb)/2;
  fc=f(xc);
  fa = f(xa);
  if fc*fa > 0
    xa=xc;
  else
    xb=xc;
  end
end

disp(sprintf(' x0 = %g (i=%d)', xc, i));
```

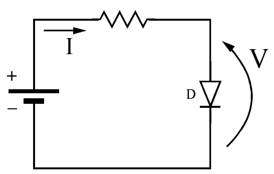
```
% ARQUVO false_position.m

EPS = 1e-3;
xa=0; xb=1;
fc=1;

fa = f(xa); mfa = abs(fa);
fb = f(xb); mfb = abs(f(xb));

i=0;
while abs(fc) > EPS
   i=i+1;
   alfa = mfa/(mfa+mfb);
   xc = (1-alfa)*xa+alfa*xb;
   fc=f(xc);
   mfc=abs(fc);
   if fc*fa > 0
     xa=xc; fa=fc; mfa=mfc;
   else
     xb=xc; fb=fc; mfb=mfc;
   end
end

disp(sprintf(' x0 = %g (i=%d)', xc, i));
```

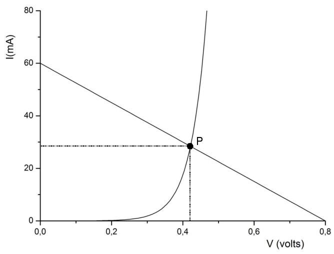
```
% ARQUVO newton_raphson.m

EPS = 1e-3;
x1=1;
f1=f(x1);
df1=df(x1);

i=0;
while abs(f1) > EPS
   i=i+1;
   if df1 < EPS
     error('derivative too small');
   end
   x1 = x1 - f1/df1;
   f1=f(x1);
   df1=df(x1);
end

disp(sprintf(' x0 = %g (i=%d)', x1, i));
```

6. Esboce um gráfico de $f(x) = e^{-6x} + 4x - 1$ no intervalo $0 < x \le 1$. Em seguida, encontre a raiz de f(x) nesse intervalo, com precisão de três significativos,
   i) Usando bissecção, iniciando com o intervalo [0.0001 1]; *Resp.: 0.146 (em 10 iterações)*
   ii) usando o método da posição falsa, iniciando com o intervalo [0.0001 1]; *Resp.: 0.146 (em 27 iterações)*
   iii) usando o método de Newton-Raphson, partindo do ponto x = 1. *Resp.: 0.146 (em 4 iterações)*
   iv) compare seu resultado com o obtido pelo MATLAB

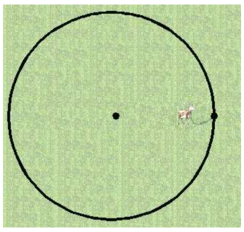
7. Encontre as três raízes de $f(x) = e^{-(x-2)^2} + e^{x/4} - 2.5$ para x > 0, com 4 significativos. *Resp.: 1.764 , 2.935 e 3.485*

8. A relação entre a corrente e a tensão em um diodo D segue a equação $I = 0.00214e^{V/0.0444}$ (miliampères, volts). Esse diodo é polarizado através de um resistor, conforme mostra o circuito, de modo que a relação entre V e I deve obedecer também à equação $I = 60(1 - V/0.8)$. Encontre os valores de V e de I no ponto P de operação do diodo, com dois significativos. *Resp.: V=0.42, I=28mA*

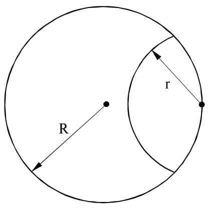




9. Uma cabra está amarrada por uma corda à cerca de um terreno circular de raio R. Qual deve ser o comprimento r da corda de modo que ela coma apenas metade da grama?



A solução geral desse problema é
$$\begin{cases} S = (\pi - \theta)R^2 \\ \theta = (2-q^2)\cos^{-1}\left(\dfrac{q}{2}\right) + \dfrac{q}{2}\sqrt{4-q^2} \\ q = \dfrac{r}{R} \quad (0 \le q \le 2) \end{cases}$$



, onde S é a área que a cabra come.

(a) Verifique essa fórmula para $r = 0$ e $r = 2R$.
(b) Encontre numericamente o valor de r/R para que a cabra coma apenas metade da grama. *Resp.: 1.1587*
(c) esboce um gráfico de $S/(\pi R^2) \times q$.

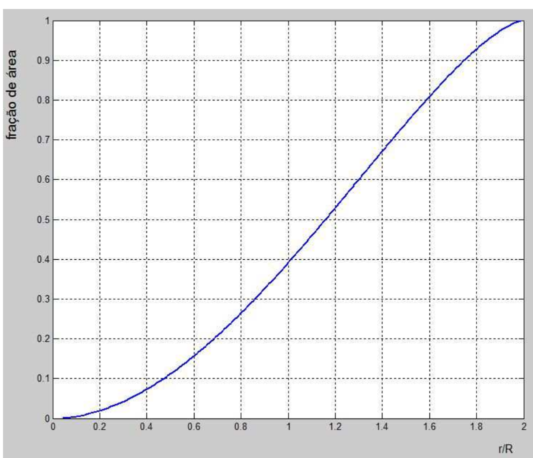
```
% ARQUVO s.m

function y = s(q)
if (q > 2) | (q < 0)
  error(' q must be within 0 and 2');
end
a = acos(q/2);
a = (2-q*q)*a;
b = sqrt(4-q*q);
b = q*b/2;
a = a+b;
y = (1-a/pi);
end
```

É preciso informar para fzero que a variável da função s é q, e não x. Para isso, podemos passar para fzero uma função anônima:

```
>> q0 = fzero(@(q) s(q)-0.5,1)

q0 =   1.158728473018121
```

FZERO pode falhar perto dos extremos do intervalo, a menos que se especifique que a raiz está entre 0 e 2 (exclusive!).

```
>> clear all
>> i=0;
>> for sc = 0.001:0.002:0.999
i=i+1;
x(i)=fzero(@(q) s(q)-sc,[0.0001,1.9999]);
end
>> sc = 0.001:0.002:0.999;
>> plot(x,sc);
```



10. Uma barra de alumínio, muito comprida, está inicialmente à temperatura de fusão $T_M = 657^oC$. Ela não troca calor com o ambiente, a não ser através da extremidade esquerda. No instante t=0, a temperatura dessa extremidade é elevada para $T_0 = 800^oC$, e mantida nesse valor. O alumínio começa então a derreter, a partir dessa extremidade. Pode-se mostrar que a posição s da interface líquido-sólido avança com o tempo de acordo com

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{a_l.t}$$

, onde a_l é a difusividade térmica do alumínio (8.418×10^{-5} m^2/s).

O parâmetro λ satisfaz a equação transcendental $\lambda e^{\lambda^2} erf(\lambda) = \dfrac{c_l(T_0 - T_M)}{r\sqrt{\pi}}$.

$c_l = 1,13$kJ/(kg.^{o}C) é o calor específico do alumínio líquido.

$r = 396$ KJ/kg é o calor latente de fusão do alumínio.

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \quad \text{(função erro)}$$

Encontre o valor do parâmetro λ e o tempo para se derreter meio metro de alumínio.

Resp.: 0.4250 ; 1h8min31s

```
>> clear all

>> erf(1)
ans =  0.842700792949715
>> erf(5)
ans =  0.999999999998463
>> erf(0)
ans =    0

>> a = 1.13*(800-657)/(396*sqrt(pi))
a =  0.230220693953237

>> f = @(x) x*exp(x*x)*erf(x)-a
f =  @(x)x*exp(x*x)*erf(x)-a

>> f(2)
ans =  1.084552880197142e+002
>> f(0.2)
ans =  -0.183862443095076
>> f(0.3)
ans =  -0.122348209211971
>> f(0.4)
ans =  -0.029131459674418
>> f(0.5)
ans =  0.103946842294171

>> lambda=fzero(f,0.5)
lambda =  0.424996845165066
```

```
>> t = @(s) ((s/(2*lambda))^2)/8.418e-5
t =  @(s)((s/(2*lambda))^2)/8.418e-5

>> t0 = t(0.5)
t0 =  4.110547617304460e+003
>> t0 = t0/3600
t0 =   1.141818782584572
>> t0=t0-1
t0 =   0.141818782584572
>> t0=t0*60
t0 =   8.509126955074336
>> t0=t0-8
t0 =   0.509126955074336
>> t0=t0*60
t0 =  30.547617304460175
```

BIBLIOGRAFIA

1. Press, W.H. et all, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, NY, 1992.
2. MATLAB: *Versão do estudante, Guia do Usuário*, MAKRON, SP, 1997
3. Kuo, S.S., *Computer Applications of Numerical Methods*, Addison-Wesley, Mass, 1972