CÁLCULO INTEGRAL

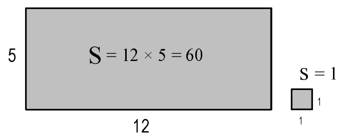
1º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri

1ª Série de Exercícios : *Integração*

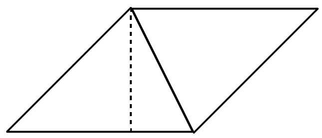
O CÁLCULO DE ÁREAS

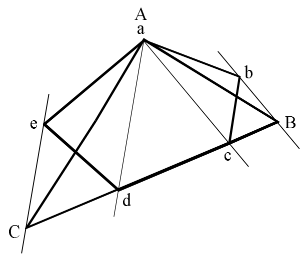
(I) Área é a medida de um espaço de duas dimensões. O valor da área significa quantas vezes esse espaço é maior do que uma medida padrão. Disso decorre que a área de uma região retangular é simplesmente o produto da medida dos lados (base × altura) :



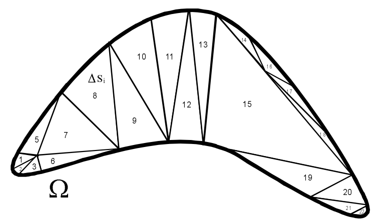
Note que não é necessário que os lados tenham medidas inteiras. A área de um retângulo de lados 1,34 e 2,59 é 3,4706. (é importante que voce reflita e se convença claramente disto!). A situação fica um pouco mais complicada se alguma medida for irracional (por exemplo, $\sqrt{2}$ ou π), mas com um pouco mais de reflexão voce se convencerá de que as contas continuam válidas mesmo nesses casos.

(II) É fácil demonstrar que a área de um paralelogramo é também o produto de um de seus lados pela distancia entre os outros dois (altura), e então que a área do triângulo é metade do produto entre a base e a altura. A área de uma figura plana com lados retos pode ser facilmente encontrada dividindo-a em triângulos. Pode-se prontamente desenhar um triângulo com a mesma área de uma figura plana qualquer que tenha lados retos.





(III) A área de uma região que não é delimitada apenas por segmentos de reta deve ser encontrada por um processo de limite: dividimos a figura em regiões cada vez menores e mais numerosas, e o valor da área é o limite da soma dessas pequenas áreas quando o número delas fica cada vez maior. Os computadores calculam o valor da área de uma região qualquer por aproximação, dividindo a figura em um número adequado de figuras menores com lados retos.

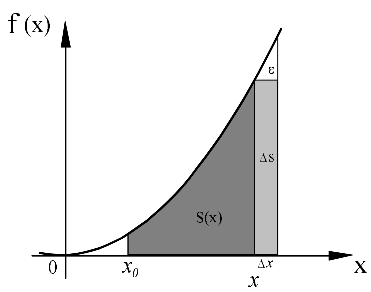


$$S \cong \sum \Delta S_i$$

$$S = \lim_{\substack{i \to \infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum \Delta S_i = \int_{\Omega} dS$$

(IV) A área delimitada pelo gráfico de uma função conhecida pode ser encontrada usando o cálculo diferencial, como segue.

Seja S(x) a área sob o gráfico da função f(x) a partir de um ponto de referência x_0 , até o ponto x. Se x aumenta de Δx, a área S(x) aumenta de ΔS. Um valor aproximado de ΔS é a área do retângulo de lados Δx e f(x), de modo que $\Delta S \cong (\Delta x).f(x)$. Supondo que o erro ε dessa aproximação tenda a zero quando Δx fica cada vez menor, no limite $\Delta x \to 0$ teremos $\dfrac{dS}{dx} = f(x)$. A função S(x) fica determinada pelas relações:

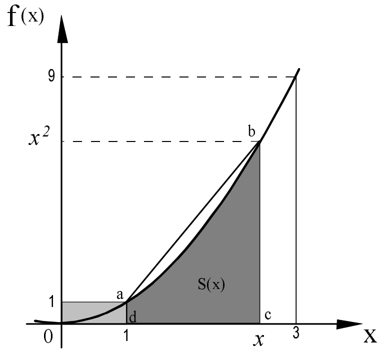


$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dx} = f(x) \\ S(x_0) = 0 \end{cases}$$

Dizemos que S(x) satisfaz um problema de valor inicial. S(x) satisfaz a equação diferencial S′(x) = f(x) e a condição inicial $S(x_0)$ = 0.

Portanto, a derivada da função S(x) é a função conhecida f(x). S(x) é chamada de primitiva de f(x).

EXEMPLO: Seja encontrar a área sob o gráfico de f(x) = x^2 entre x=1 e x=3.



Definindo S(x) a área a partir de x=1 até x, teremos $\begin{cases} \dfrac{dS}{dx} = x^2 \\ S(1) = 0 \end{cases}$.

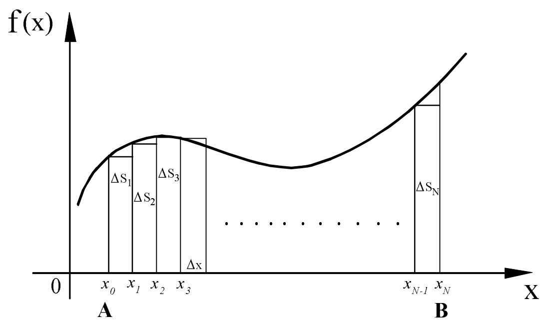
Portanto, $S(x) = \dfrac{x^3}{3} + K$, e o valor de K deve ser −1/3 para que S(1)=0. Logo, $S(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}$ e S(3) = 26/3 ≅ 8,67. Note que a área pedida é aproximadamente 8,7 vezes a área do retângulo 1×1 marcado na figura, e é menor que a área do trapézio abcd, que vale 10.

(V) (o cálculo de áreas como limites de somas infinitas) Para calcular a área S sob o gráfico de uma função f(x) entre x=A e x=B, (1) dividimos S em um número N de pequenas áreas ΔS_i ; (2) calculamos cada pequena área de modo que o erro tenda a zero quando ela ficar cada vez menor, e (3) calculamos o limite da soma das áreas ΔS_i à medida em que o número delas aumenta e cada uma fica cada vez menor. Esse processo está esquematizado abaixo quando dividimos o intervalo [A,B] por uma malha uniforme de largura $\Delta x = \dfrac{B-A}{N}$.

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i$$

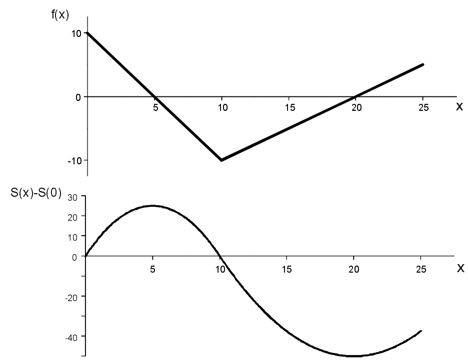
$$S \cong f(x_0).\Delta x + f(x_1).\Delta x + ... + f(x_{N-1}).\Delta x = \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i).\Delta x$$

$$S = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (N \to \infty)}} \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i).\Delta x = \int_A^B f(x).dx$$



Riemann desenvolveu um método que permite obter o valor da área mesmo em casos onde a função f(x) apresenta um número finito de descontinuidades finitas (“saltos” finitos) no intervalo [A,B]; por esse motivo, a integral usualmente empregada é chamada de “integral de Riemann”.

(VI) A área, como definida acima, tem sinal algébrico, uma vez que ΔS tem o mesmo sinal de f(x). Na figura ao lado, o gráfico inferior representa o valor da área sob f(x) a partir do ponto x = 0. Observe que $f(x) = \dfrac{dS}{dx}$.



O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

$$f(B)-f(A)=\int_A^B f'(x)dx$$

$\Rightarrow$ para calcular a integral de f(x), "basta" encontrar sua primitiva e calcular a variação desta entre os extremos de integração.

<u>Exercício 1</u>: Calcule a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ entre x = 2 e x = 5.

Algumas primitivas são fáceis de encontrar, por exemplo:

$$\int x^N dx = \frac{x^{N+1}}{N+1} \quad (N \neq -1) \qquad ; \qquad \text{para N=0 obtemos } \int dx = x \quad \textit{(óbvio !!!)}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \qquad \int e^{\alpha x}dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \qquad \int sen(x)dx = -\cos(x) \qquad \int \cos(x)dx = sen(x)$$

(as primitivas são definidas a menos de uma *constante de integração*)

PROPRIEDADES

$$\int_A^B + \int_B^C = \int_A^C \text{ , e, portanto, } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx \qquad \textit{(linearidade)}$$

<u>Exercício 2</u>: Calcule a área sob o gráfico das funções no intervalo indicado. Quando a resposta não for um número comum, escreva-a com três significativos.

(a) $f(x) = 2x-1$ entre x = 0 e x = 3

(b) $f(x) = x^2-3x+2$ entre x = 1 e x = 2

(c) $f(x) = 50e^{-2x}$ entre x = 0 e x = 1

(d) $h(t) = 10\cos(\pi t/5)$ entre x = 0 e x = 2

(e) $v(t) = 20e^{-t/4}$ entre t = 0 e t = 8

(f) $w(x) = \frac{5}{x}$ entre x = 1 e x = 2

(g) $g(x) = \sqrt{x}$ entre x = 0 e x = 1

USO DE TABELAS

Encontrar a primitiva pode exigir uma boa dose de arte, técnica e esperteza matemática. Em um bom número de casos importantes, nem sequer é possível escrever a primitiva em termos de funções elementares. As <u>tabelas de integrais</u> listam as primitivas conhecidas que são mais importantes.

<u>Exercício 3</u>: Sabendo que $\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{a\cos(bx) + b\,sen(bx)}{a^2+b^2}e^{ax}$

encontre, com três significativos,

(a) a área sob a função $f(t) = 20e^{-3t}\cos(3\pi t)$ entre t = 0 e t = 1

(b) a área total sob a função $f(t) = 5e^{-20t}\cos(10\pi t)$ para t > 0 (entre t = 0 e $t\to\infty$)

Exercício 4: Encontre a área sob $f(t)=\dfrac{10t}{t^3+20}$ para t > 0 (entre t = 0 e t→∞), com três significativos.

$$\text{Dado (tabela):}\quad \int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+a^n}\,dx=\frac{\pi a^{m+1-n}}{n.\mathrm{sen}\left[\frac{(m+1)\pi}{n}\right]}\qquad (0<m+1<n)$$

Exercício 5: Calcule $20\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^8(t)\,dt$ com três significativos, sabendo que

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^{2m}(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2m}(x)\,dx=\frac{1.3.5...(2m-1)}{2.4.6...(2m)}\frac{\pi}{2}$$

TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR MUDANÇA DE VARIÁVEL

Muitas integrais podem ser transformadas em outras mais simples através de uma mudança na variável de integração.

Exercício 6: Calcule $I=\int_0^{\pi/2}e^{\mathrm{sen}x}\cos(x)\,dx$ com três significativos, utilizando a transformação u = sen(x).

Exercício 7: Calcule $I=\int_0^{\pi/4}\cos^4(2x)\,dx$ com três significativos, fazendo u = 2x. *(veja dado do Exercício 5)*

Exercício 8: Calcule $I=10\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^3(x)\cos(x)\,dx$ com três significativos, utilizando a transformação u = sen(x).

Exercício 9: Calcule $I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\mathrm{sen}^2x}\;\mathrm{sen}(2x)\,dx$ com três significativos, fazendo u = 1 + $\mathrm{sen}^2(x)$ e lembrando que sen(2x) = 2sen(x)cos(x).

A INTEGRAL DE 1/x
TÉCNICA DAS FRAÇÕES PARCIAIS

Exercício 10: Obtenha o valor das integrais abaixo com três significativos:

$$\text{(a)}\ \int_3^4\frac{5}{x-2}dx\qquad\qquad \text{(b)}\ \int_{-7}^{-6}\frac{10}{x+5}dx$$

Exercício 11: (a) Escreva $f(x)=\dfrac{2}{x(x-1)}$ na forma $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}$ (encontre A e B).

(b) Encontre a área sob o gráfico de f(x) entre x = 1,5 e x = 2 com três significativos.
(c) Encontre a área sob o gráfico de f(x) entre x = 0,2 e x = 0,8 com três significativos.

(d) Encontre a área sob o gráfico de f(x) entre x = −0,6 e x = −0,2 com três significativos.

Exercício 12: Calcule $\int_{-1,8}^{-0,9} \frac{10}{x(x-1)(x+2)}dx$ com três significativos.

A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

Da regra de derivação do produto, podemos deduzir a seguinte igualdade:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Isto pode ser aplicado no cálculo de integrais aonde o integrando é um produto de duas funções, uma das quais tem uma derivada simples, e a outra tem uma primitiva simples. A idéia é transformar a integral em outra mais fácil.

Exercício 13: Calcule $\int_0^1 xe^x dx$, por partes, utilizando u = x e dv = e^xdx.

Exercício 14: Mostre que $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$.

Primeiro aplique a transformação u = ln(x), e em seguida a integração por partes análoga ao exercício 13.

Exercício 15: Calcule $\int_0^{\pi/3} x\,\text{sen}(x)dx$, por partes, utilizando u = x e dv = sen(x)dx. *(três significativos)*

Exercício 16: Calcule $\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t}dt$, aplicando a técnica de integração por partes duas vezes em seguida.

(três significativos)

APLICAÇÕES DO CÁLCULO INTEGRAL

(VII) Se x(t) representa a posição de um móvel, então sua velocidade é $v = \frac{dx}{dt}$ e a aceleração é $a = \frac{dv}{dt}$. Portanto, dx = v.dt e dv = a.dt . A área sob o gráfico de v×t é o deslocamento sofrido pelo móvel e a área sob o gráfico de v×t é a mudança de velocidade no intervalo considerado.

Exercício 17: Um automóvel se desloca a partir do instante t = 0 de modo que sua velocidade v, em km/h, varia com o tempo t em minutos de acordo com v = 4,8t(10−t). Qual a distância total percorrida nos primeiros dez minutos? *(cuidado com as unidades !!!)* - reposta com três significativos –

(VIII) Se ϕ(t) é a vazão de água por um cano, então $\phi = \frac{dq}{dt}$, onde q é a quantidade de água que atravessa uma seção transversal do cano. A área sob o gráfico de ϕ×t é a quantidade total de água que passou pelo cano.

Exercício 18: Uma bomba retira gasolina de um reservatório de modo que a vazão aumenta com o tempo de acordo com $\phi = k\sqrt{t}$. Qual o valor de k de modo que essa bomba esvazie um reservatório de 3000 litros em cinco minutos? - reposta com dois significativos –

(IX) Se i(t) é a corrente elétrica através de um fio condutor, então $i = \frac{dq}{dt}$, onde q é a quantidade de carga que atravessa uma seção transversal do fio. A área sob o gráfico de i×t é a quantidade total de carga que passou pelo fio.

Exercício 19: Uma bateria é carregada através de uma corrente elétrica que decai exponencialmente com o tempo, de acordo com $i(t) = 2e^{-t/15}$. A corrente é dada em ampères (1A = 1C/s) e o tempo em minutos. A bateria estará carregada após a corrente ter praticamente zerado. Qual a quantidade de carga na bateria quando estiver totalmente carregada? *(cuidado com as unidades !!!)*

(X) A densidade de um fio não-homogêneo varia com a posição x. Se um trecho dx do fio tem massa dm, então a densidade nesse local do fio é $\lambda = \frac{dm}{dx}$. A massa total do fio é a área sob o gráfico de λ(x).

Exercício 20: Uma certa barra não-homogênea de comprimento L tem densidade máxima em seu ponto médio, descrita por $\lambda(x) = k(L^2/4 - x^2)$, onde x varia de –L/2 a +L/2 (o ponto médio da barra é colocado na posição x = 0, por conveniência).

(a) Qual o valor de k em função do comprimento L da barra e de sua massa total M ?
(b) Qual a posição do centro de massa da metade direita dessa barra?
Sugestão: divida a barra em pedacinhos Δx, cada um com massa Δm, e calcule o centro de massa do conjunto. Exprima o resultado na forma de um somatório, e depois obtenha uma integral fazendo o limite Δx → 0.

RESPOSTAS

1. 39
2. (a) 6 (b) –1/6 (c) 21,6 (d) 15,1 (e) 69,2 (f) 3,47 (g) 2/3
3. (a) 0,644 (b) 0,0721
4. 4,45
5. 8,59
6. 1,72
7. 0,295
8. 2,50
9. 1,22
10. (a) 5ln2 = 3,47 (b) –10ln2 = –6,93
11. (a) A= –2 B=2 (b) 0,811 (c) –5,55 (d) 1,62
12. 5,01
13. 1
15. 0,342
16. 1/4 = 0,250
17. 13,3km
18. 0,58 litros/$s^{1,5}$
19. 1800 C
20. (a) $k = 6M/L^3$ (b) 3L/32 (c)