CÁLCULO AVANÇADO

1º Semestre de 2014

Prof. Maurício Fabbri

1ª Série de Exercícios

Séries numéricas

Exercício 1. Verifique se cada série abaixo converge ou não. Dê a sua justificativa.

(a) $5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+...$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

(d) 1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + ...

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

(h) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{i}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{1+n^2}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(1,2)^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{(1,2)^n}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

Exercício 2. Calcule a soma das séries abaixo:

(a) $5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+...$

(b) 1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + ...

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(1,2)^n}$

(f) $5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1,2)^n}$

Exercício 3. Calcule a soma das séries alternadas abaixo com precisão de ± 0,01:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

Exercício 4. Calcule a soma das séries abaixo com precisão de ± 0,01:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^{5,7}}$

1ª Série de Exercícios - RESPOSTAS

Séries numéricas

Exercício 1.

(a) $5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+...$

Converge, pois é uma série geométrica de razão -2/3.
(toda série geométrica de razão q tal que |q| < 1 converge)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}$

Diverge, pois o termo geral não tende a zero $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n^2+4}=\frac{1}{5}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Diverge, pois é uma série geométrica com razão 4/3.
(toda série geométrica de razão q tal que |q| ≥ 1 diverge)
O termo geral não tende a zero $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}=\infty\right)$

(d) 1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + ...

Converge, pois é uma série geométrica de razão 0,4
(toda série geométrica de razão q tal que |q| < 1 converge)

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}$

Diverge, pois é 3 vezes a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, que sabidamente diverge.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

Diverge, pois o termo geral não tende a zero $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1\right)$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Converge, pois é uma série alternada e o termo geral tende a zero $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{i}}$

Diverge, pois é uma série-p (função Zeta de Riemman, série harmônica generalizada) com p=1/3.
A série-p sabidamente diverge quando $p \leq 1$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$

Converge, pois é uma série alternada e o termo geral tende a zero $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}=0\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{1+n^2}}$

Diverge, pois o termo geral não tende a zero $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1\right)$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(1,2)^n}$

Converge, pois é uma série geométrica de razão 1/(1,2).
(toda série geométrica de razão q tal que $|q| < 1$ converge)

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{(1,2)^n}$

Converge, pois é uma série geométrica de razão −1/(1,2).
(toda série geométrica de razão q tal que $|q| < 1$ converge)
Além disso, é uma série alternada com o termo geral tendendo a zero.

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Aqui é necessário apelar para o teste da razão.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1.2.3....n}{1.2.3....n.(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Como esse limite é menor do que 1, a série converge.

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

Converge, pois é uma série alternada e o termo geral tende a zero $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0\right)$

Além disso, vimos no item anterior que essa série é absolutamente convergente.

Exercício 2.

(a) $5-\frac{10}{3}+\frac{20}{9}-\frac{40}{27}+\ldots$ é uma série geométrica de razão -2/3

A soma da série é $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{5}{1-(-2/3)}=\frac{5}{5/3}=3$

(b) 1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + ...

É uma série geométrica de razão 0,4

A soma da série é $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-0{,}4}=\frac{1}{0{,}6}=\frac{5}{3}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

Faça a expansão em frações parciais: $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1/2}{n}-\frac{1/2}{n+2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots.\right]=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Faça a expansão em frações parciais: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1/2}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1/2}{n+2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(1{,}2)^n}$

É uma série geométrica de razão 1/1,2 $\Rightarrow$ $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{5/1{,}2}{1-1/1{,}2}=\frac{5}{1{,}2-1}=\frac{5}{0{,}2}=25$

(f) $S=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1{,}2)^n}$

A soma é uma PG de razão -1/1,2 $\Rightarrow$ $S=5\frac{a_1}{1-q}=5\frac{-1/1{,}2}{1-(-1/1{,}2)}=\frac{-5}{1{,}2+1}=\frac{-5}{2{,}2}=-2{,}2727\ldots$

Exercício 3.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

A série é $S = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+....$, que é alternada.

Expressando esses números na forma decimal, teremos:

S = 1 – 0,25 + 0,111... – 0,0625 + 0,04 – 0,0277... + 0,0204... – 0,0156... + 0,0123... – 0,01 + ...

Sabemos que o erro de truncamento é menor que o primeiro termo desconsiderado.
Para que o erro de truncamento seja ≤ 0,01, somamos os nove primeiros termos acima, isto é,

S = 0,82796... – 0,01 + ...

Note que as contas devem ser feitas utilizando a resolução total da calculadora: não é necessário, e nem se deve, arredondar manualmente os números intermediários. Utilize, se necessário, a memória de sua calculadora.

O resultado final deve ser escrito levando em conta um número de casa decimais compatível com o erro estimado (no caso acima, duas casas), e efetuando os arredondamentos finais de forma correta.

Resposta final: S = 0,83 ± 0,01

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+1)}$

Teremos S = -0,5 + 0,0833... – 0,0277... + 0,0125 – 0,00666... + ...

Aqui, basta somar os quatro primeiros termos, porque o quinto termo já é menor do que 0,01.

S = -0,43194... – 0,00666... + ...

Resposta final: S = -0,4319 ± 0,0067

NOTE: 1. O número de casas decimais deve ser o mesmo no resultado e no erro (desvio)
2. O arredondamento correto no resultado
3. O erro (desvio) deve ser sempre arredondado para cima
4. O erro (desvio) deve ser expresso com, no máximo, dois algarismos significativos.

Também poderíamos responder, corretamente, que S = -0,432 ± 0,007
ou ainda, que S = -0,43 ± 0,01

Naturalmente, a resposta com o menor desvio possível é a melhor.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

Bastam os quatro primeiros termos.

Resposta final: S = 0,6250 ± 0,0084

Exercício 4.

(a) Devemos ter

$$\int_N^{\infty}\frac{1}{x^3}dx \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\Bigg|_{\infty}^{N} \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2N^2} \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad 2N^2 \ge 100 \quad\Rightarrow\quad N \ge 7{,}07$$

Somando até o oitavo termo, encontramos 1,195.

(b) $$\int_N^{\infty} e^{-x}dx \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad e^{-x}\Big|_{\infty}^{N} \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad e^{-N} \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad N \ge 4{,}6$$

Somando até o quinto termo, encontramos 1,578 .

(c) $$\int_N^{\infty}\frac{4}{x^{5,7}}dx \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{4{,}7}\frac{1}{x^{4,7}}\Bigg|_{\infty}^{N} \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{4{,}7N^{4,7}} \le 0{,}01 \quad\Rightarrow\quad N^{4,7} \ge \frac{4}{0{,}047} \quad\Rightarrow\quad N \ge 2{,}57$$

Somando até o terceiro termo, encontramos 4,085 .