

ROTEIRO PARA ANÁLISE DE SÉRIES NUMÉRICAS INFINITAS

1. Para que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ seja convergente, é necessário (*mas não suficiente!*) que o termo geral tenda a zero, isto é, que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Exemplo 1: a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$ diverge, porque o termo geral tende a 1.

Exemplo 2: o termo geral da série $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ tende a zero. Isto não é suficiente para afirmar que S converge. (na verdade, S é a famosa série harmônica, que sabidamente diverge).

Exemplo 3: o termo geral da série $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ tende a zero. Mas apenas essa informação não permite concluir se P converge ou diverge. (pode-se provar que P converge para $\ln 2$).

2. Séries alternadas estritamente decrescentes (isto é, $|a_i| < |a_j|$ se $i > j$), convergem se o termo geral tender a zero. Nesse caso, o erro de truncamento é menor que o primeiro termo que foi desprezado.

Exemplo 4: a série $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ converge, uma vez que é alternada e o termo geral tende a zero.

Seja P_k a soma dos k primeiros termos de P. Temos:

$$P_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,833\dots \text{ Como o quarto termo de } P \text{ é } 1/4 = 0,25, \text{ podemos afirmar que } P = 0,833\dots \pm 0,25.$$

$$P_7 = 0,75952\dots \text{ Como o oitavo termo de } P \text{ é } 1/8 = 0,125, \text{ podemos afirmar que } P = 0,7595\dots \pm 0,125.$$

As séries alternadas são bastante convenientes em problemas práticos de engenharia, uma vez que é possível calcular facilmente o erro de truncamento.

3. A série $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ é chamada de série harmônica, e sabidamente diverge.

(uma demonstração simples e instrutiva disso foi feita por Oresme na idade média)

A série harmônica generalizada $S_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Exemplo 5: a série $Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ diverge, pois é uma série harmônica generalizada com $p = 1/2$.

Exemplo 6: a série $R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ converge, pois é uma série harmônica generalizada com $p = 2$.

O valor de S_p pode ser encontrado em tabelas ou através de algoritmos numéricos sofisticados. Por exemplo, $S_2 = \pi^2/6$ e $S_3 = 1,05179979026464499972\dots$

Se p for um número complexo, S_p é conhecida como função Zeta de Riemann, $\zeta(p)$.

4. A série geométrica $a_1 + qa_1 + q^2 a_1 + \dots$ converge para $\frac{a_1}{1-q}$ se $|q| < 1$ e diverge se $|q| \geq 1$.

Exemplo 7: a série $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ converge para 2, pois é uma série geométrica com razão $1/2$.

Exemplo 8: a série $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3^i} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$ converge para 0,75, pois é uma série geométrica com razão $-1/3$.

5. A soma de algumas séries envolvendo frações pode ser encontrada pela técnica da expansão em frações parciais, ilustrada no exemplo abaixo.

Exemplo 9: considere a série $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.4} + \frac{4}{3.5} + \dots$

Notando que $\frac{n}{(n-1)(n+1)} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}$, basta trabalhar com as somatórias e índices para encontrar o valor de S :

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{4}$$

6. (O critério da razão) Seja $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente.

Se $L > 1$, a série é divergente.

Se $L = 1$, nada se pode afirmar.

Exemplo 10: Considere $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + 1 + \frac{25}{32} + \dots$

Teremos $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}$, e portanto a série converge.

7. O erro de truncamento de uma série convergente com termos positivos e decrescentes pode ser calculado pelo critério da integral:

Se $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, usando a soma parcial $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ o erro cometido será $\varepsilon = |S - S_N| < \int_N^{\infty} f(x) dx$, onde definimos

$f(n) = a_n$ valendo para todo n real.

Exemplo 11: Considere $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$. Para somar essa série com precisão de 0,01, escolhemos N de modo que

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < 0,01 \Rightarrow \frac{1}{N} < 0,01 \Rightarrow \frac{1}{N} > 0,01 \Rightarrow N > 100$$

8. Se nenhum dos critérios acima funcionar, é preciso empregar técnicas ou tabelas mais sofisticadas (veja por exemplo os livros indicados abaixo, ou procure resultados na Internet ou, ainda, utilize programas profissionais de manipulação matemática e cálculo numérico). Séries infinitas não podem ser somadas no computador – que sempre fornece uma soma parcial da série. Nesse caso, pode ser difícil estimar o erro de truncamento (uma soma parcial sempre dá um resultado finito, mesmo que a série não seja convergente). O ideal para problemas práticos é ter um resultado na forma de uma série alternada, porque nesse caso o erro de truncamento pode ser calculado facilmente.

REFERENCIAS

- Swokowski, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed., volume 2. São Paulo: Makron, 1995. 2 v.
- Kaplan, W. **Cálculo avançado**. São Paulo: E. Blücher, 1972-1987. 2 v.
- Boulos, P. e Abud, Z.I. **Cálculo diferencial e integral**, volume 2. São Paulo: Makron, 2000.
- Spiegel, M.R., **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. Coleção Scham, São Paulo, McGraw Hill, 1977 ou mais recente.
- Abramowitz, M. and Stegun, I.A., ed. **Handbook of Mathematical Functions**. NY, Dover, 1965 ou mais recente.
- Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. and Jeffrey, A.J.(ed.), **Table of Integrals, Series and Products**. NY, Academic Press, 1994.