

**SÉRIES NUMÉRICAS INFINITAS**

**1. Notação:**  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_i$  é chamado de termo geral da série)

- ☞ Para que essa soma de infinitos termos tenha alguma chance de convergir, é necessário que o termo geral tenda a zero à medida que  $n$  aumenta, isto é, é preciso que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- ☞ Mas a condição  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  não garante a convergência da série.

**2. Exemplos:**

(a) A série harmônica:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (essa série diverge, como veremos mais adiante)

(b)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  (uma série geométrica com razão  $\frac{1}{2}$ . Veremos que ela converge para 2)

(c)  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  (uma série alternada. Essa série converge para  $\pi^2/12$ )

(d)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$  (essa série diverge, porque o termo geral não tende a zero)

É comum o uso do símbolo de fatorial em séries numéricas,  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  ( $0!$  é definido como sendo 1)

(e)  $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  (essa série converge para  $e = 2,71828182\dots$ )

**3. A notação de somatório; índices neutros.**

Observe que o nome do índice utilizado na notação de somatório é irrelevante. Por exemplo,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ . Os limites do índice também podem ser escolhidos, contanto que modifiquemos a

fórmula adequadamente. Por exemplo,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{p=5}^{\infty} \frac{1}{p-4}$ . Algumas vezes podemos encontrar o

valor da soma de uma série simplesmente manipulando a fórmula do termo geral e mudando os índices.

Por exemplo, considere  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

O valor dessa soma pode ser facilmente encontrado como segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = 1$$

**Exercício 1:** Complete as informações que estão faltando:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k-1}$$

$$(b) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$(c) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots = \sum_{j=1}^{\infty}$$

$$(d) \frac{3}{2^3} - \frac{5}{4^3} + \frac{7}{6^3} - \frac{9}{8^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty}$$

$$(e) \frac{3}{1 \times 5^2} + \frac{5}{3 \times 7^2} + \frac{7}{5 \times 9^2} + \frac{9}{7 \times 11^2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty}$$

$$(f) 2 - \frac{4}{1 \times 2} + \frac{8}{1 \times 2 \times 3} - \frac{16}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}$$

**Exercício 2:** Encontre o valor das somas abaixo expandindo o operando em frações parciais e manipulando os índices de soma:

$$(a) S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

$$(b) S = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{6}{(n-3)(n+3)}$$

$$(c) S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n+1)}$$

Respostas: (a) 11/18 (b) 49/20 = 2,45 (c) 1/4

#### 4. Somas parciais; convergência.

A soma parcial dos  $N$  primeiros termos da série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  é  $S_N = \sum_{i=1}^N a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$ .

Dizemos que a série converge para  $S$  quando  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ . Se esse limite não existir, dizemos que a série diverge.

Para que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  seja convergente, é necessário (*mas não suficiente!*) que o termo geral tenda a zero, isto é, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Exemplo 1:** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$  diverge, porque o termo geral tende a 1.

**Exemplo 2:** o termo geral da série  $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  tende a zero. Isto não é suficiente para afirmar que  $S$  converge. (na verdade,  $S$  é a famosa série harmônica, que sabidamente diverge).

**Exemplo 3:** o termo geral da série  $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  tende a zero. Mas apenas essa informação não permite concluir se  $P$  converge ou diverge. (pode-se provar que  $P$  converge para  $\ln 2$ ).

#### 5. Convergência absoluta

Dizemos que a série  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente quando  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge.

**Exemplo 1:** a série  $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$  é absolutamente convergente, porque  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  converge para 2.

**Exemplo 2:** a série  $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  é convergente, mas não é absolutamente convergente, porque  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  diverge.

Séries que são convergentes, mas não absolutamente convergentes, apresentam um comportamento curioso: o resultado da soma pode ser qualquer um, dependendo da ordem em que os termos são somados.

Por exemplo, se a série  $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  é somada exatamente como indicado (primeiro 1, depois  $-1/2$ , depois  $1/3$ , e assim por diante), ela vai convergir para  $\ln(2)$ . Mas podemos fazer essa mesma série convergir para qualquer valor que quisermos: basta somar seus termos de maneira adequada. Por exemplo, se desejarmos que ela convirja para 5, procedemos assim:

- some primeiro alguns termos positivos, até que a soma exceda 5
- depois acrescente alguns termos negativos, até que a soma fique menor do que 5
- então adicione mais termos positivos, até que a soma fique maior do que 5
- em seguida acrescente mais termos negativos, até que a soma fique menor do que 5
- e assim por diante, de modo que a soma se aproxime cada vez mais de 5

**Exercício 3:** A série  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  é convergente, mas  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$  diverge.

- (a) Consultando uma tabela, encontramos que  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  converge para  $\pi/4$ . Some os termos dessa série, nessa ordem, usando sua calculadora, até que o resultado se aproxime de  $\pi/4$  até a terceira casa decimal. (*sugestão: use uma calculadora programável...*)
- (b) Some os termos dessa série em sua calculadora, de modo que o resultado se aproxime de 0,900 até a terceira casa decimal. (*sugestão: use o computador...*)
- (c) Some os termos dessa série em sua calculadora, de modo que o resultado se aproxime de  $-0,100$  até a terceira casa decimal. (*use o computador...*)

## 6. Séries geométricas

O truque de Euler:

Para calcular  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ , Euler procedeu como segue:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = 1 + \frac{1}{2} S \Rightarrow S = 1 + \frac{1}{2} S \Rightarrow 2S = 2 + S \Rightarrow S = 2$$

O procedimento acima pode ser feito de maneira rigorosa, nos casos em que a série converge. Na época de Euler, os conceitos de limite e convergência não tinham ainda sido desenvolvidos. O resultado moderno é o seguinte:

☞ A série geométrica  $a_1 + qa_1 + q^2 a_1 + \dots$  converge para  $\frac{a_1}{1-q}$  se  $|q| < 1$  e diverge se  $|q| \geq 1$ .

**Exemplo 1:** a série  $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$  converge para 2, pois é uma série geométrica com razão  $1/2$ .

**Exemplo 2:** a série  $S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3^i} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$  converge para 0,75, pois é uma série geométrica com razão  $-1/3$ .

**Exercício 4:** Encontre o valor das somas seguintes (*quando necessário, dê a resposta com 4 significativos*):

(a)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$       (b)  $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$       (c)  $S = 10 \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{2}{3} \right)^n$       (d)  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}$

Respostas: (a) 1,5    (b) 10/9    (c) 6    (d) 1,582

## 7. Série harmônica e assemelhadas.

A série  $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  é chamada de série harmônica, e sabidamente diverge.

(uma demonstração simples e instrutiva disso foi feita por Oresme na idade média)

A série harmônica generalizada  $S_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$  converge se  $p > 1$  e diverge se  $p \leq 1$ .

**Exemplo 1:** a série  $Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$  diverge, pois é uma série harmônica generalizada com  $p = 1/2$ .

**Exemplo 2** : a série  $R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$  converge, pois é uma série harmônica generalizada com  $p = 2$ .

O valor de  $S_p$  pode ser encontrado em tabelas ou através de algoritmos numéricos sofisticados. Por exemplo,  $S_2 = \pi^2/6$  e  $S_3 = 1,05179979026464499972\dots$

Se  $p$  for um número complexo,  $S_p$  é conhecida como a função Zeta de Riemann,  $\zeta(p)$ .

## 8. Séries alternadas

Séries alternadas estritamente decrescentes (isto é,  $|a_i| < |a_j|$  se  $i > j$ ), convergem se o termo geral tender a zero. Nesse caso, o erro de truncamento é menor que o primeiro termo que foi desprezado.

**Exemplo 1** : a série  $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  converge, uma vez que é alternada e o termo geral tende a zero.

Seja  $P_k$  a soma dos  $k$  primeiros termos de  $P$ . Temos:

$$P_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,833\dots \text{ Como o quarto termo de } P \text{ é } 1/4 = 0,25, \text{ podemos afirmar que } P = 0,833\dots \pm 0,25.$$

$$P_7 = 0,75952\dots \text{ Como o oitavo termo de } P \text{ é } 1/8 = 0,125, \text{ podemos afirmar que } P = 0,7595\dots \pm 0,125.$$

As séries alternadas são bastante convenientes em problemas práticos de engenharia, uma vez que é possível calcular facilmente o erro de truncamento.

**Exercício 5:** A função erro,  $\text{erf}(x)$ , descreve uma importante distribuição de probabilidades, e pode ser definida pela série infinita:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right)$$

Calcule o valor de  $\text{erf}(0,56)$  com precisão de, no mínimo,  $\pm 0,00001$ .

(confira o roteiro de cálculos na resolução da primeira série de exercícios, e forneça a resposta na forma padronizada)

Respostas corretas:  $0,5716172 \pm 0,0000015$   
 $0,571617 \pm 0,000002$   
 $0,57162 \pm 0,00001$

**9. (O critério da razão)** Seja  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

Se  $L < 1$ , a série é absolutamente convergente.

Se  $L > 1$ , a série é divergente.

Se  $L = 1$ , nada se pode afirmar.

**Exemplo** : Considere  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{8} + 1 + \frac{25}{32} + \dots$

$$\text{Teremos } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^2. \text{ Então } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}, \text{ e portanto a série converge.}$$

**Exercício 6:** Decida sobre a convergência ou não das séries abaixo, quando possível:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} e^n}{n!}$

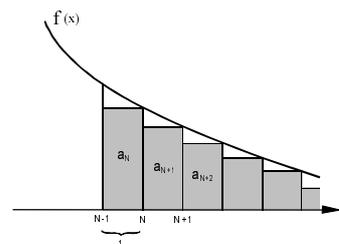
(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$

Respostas: (a) converge (b) converge (c) diverge

## 10. Estimativa do erro pelo critério da integral

Se estamos lidando com uma série convergente com termos positivos e decrescentes, podemos estimar o erro usando uma integral, como mostra a figura ao lado.

Definimos uma função  $f(x)$  de modo que  $f(n)$  tenha a mesma forma funcional do termo geral da série. Para  $n$  inteiro, teremos  $f(n) = a_n$ . É necessário que  $f(x) \geq f(n)$  para  $x < n$  (há algumas séries malucas onde isso pode não acontecer).



Como o valor de  $a_n$  é exatamente igual à área do retângulo de altura  $a_n$  e base 1, então a soma das áreas dos retângulos a partir de  $N+1$  é menor que o valor da área sob a função  $f(x)$  a partir de

$$x = N. \text{ Ou seja, } \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

Detalhando: ao aproximarmos a soma  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pela soma parcial  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ , cometemos um erro

$$\varepsilon = |S - S_N| < \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

**Exemplo 11:** Considere  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ . Para somar essa série com precisão de 0,01, escolhemos  $N$  de modo que

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < 0,01 \Rightarrow \left. \frac{1}{x} \right|_N^{\infty} < 0,01 \Rightarrow \frac{1}{N} > 0,01 \Rightarrow N > 100$$

**NOTE** que, para séries com termos positivos, não se pode confiar apenas no valor do termo geral. Para a série acima, o termo geral fica menor que 0,01 para  $N > 10$ , mas é preciso somar 101 termos para obter o resultado correto com essa precisão. Veja a tabela abaixo:

$N$	$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$
10	1,550
20	1,596
30	1,612
101	1,635

## 11. Observações finais

Se nenhum dos critérios acima funcionar, é preciso empregar técnicas ou tabelas mais sofisticadas (veja por exemplo os livros indicados abaixo, ou procure resultados na Internet ou, ainda, utilize programas profissionais de manipulação matemática e cálculo numérico). Séries infinitas não podem ser somadas no computador – que sempre fornece uma soma parcial da série. Nesse caso, pode ser difícil estimar o erro de truncamento (uma soma parcial sempre dá um resultado finito, mesmo que a série não seja convergente). O ideal para problemas práticos é ter um resultado na forma de uma série alternada, porque nesse caso o erro de truncamento pode ser calculado facilmente.

## **REFERENCIAS**

1. Swokowski, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed., volume 2. São Paulo: Makron, 1995. 2 v.
2. Kaplan, W. **Cálculo avançado**. São Paulo: E. Blücher, 1972-1987. 2 v.
3. Boulos, P. e Abud, Z.I. **Cálculo diferencial e integral**, volume 2. São Paulo: Makron, 2000.
4. Spiegel, M.R., **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. Coleção Schaum, São Paulo, McGraw Hill, 1977 ou mais recente.
5. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., ed. **Handbook of Mathematical Functions**. NY, Dover, 1965 ou mais recente.
6. Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. and Jeffrey, A.J.(ed.), **Table of Integrals, Series and Products**. NY, Academic Press, 1994.

© 2008-14 Mauricio Fabbri  
MCT/INPE: <http://www.las.inpe.br/~fabbri>  
Universidade São Francisco – USF  
Itatiba/Campinas – <http://www.saofrancisco.edu.br>  
São Paulo – Brasil  
Permitido uso livre para fins educacionais,  
sem ônus, desde que seja citada a fonte.