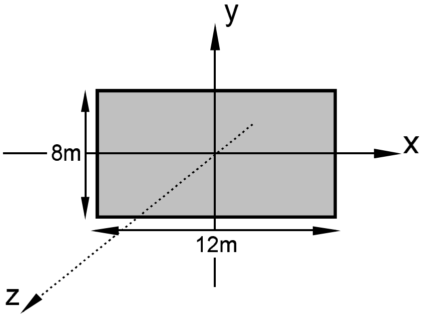
<u>2ª SÉRIE DE EXERCÍCIOS CALCULO INTEGRAL</u>

© 2003-15

Engenharias – 1º Semestre 2015

<u>Integração no plano e no espaço</u>

1) A densidade da placa retangular abaixo, em cada ponto, é dada por $\rho(x,y) = \frac{25}{384}(x+6)y^2$ [kg/m²].
Os eixos (x,y) estão posicionados concêntricos e alinhados com a placa, e estão no plano da mesma.



(a) Determine a massa total da placa, em kg.

(b) Qual a densidade média da placa, em kg/m²?

(c) Determine as coordenadas (x,y) do centro de massa dessa placa.

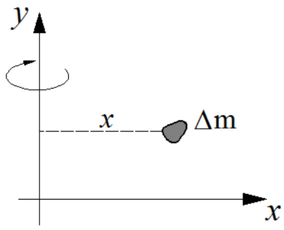
Resp.: (a) 200kg (b) 2,083kg/m² (c) (2,0)m

2) Supondo a placa do ex.1 homogênea, com uma densidade de 2,0 kg/m², obtenha seus momentos de inércia:

(a) Em torno do eixo x
(b) Em torno do eixo y
(c) Em torno do eixo z

Resp.: (a) 1024 kg.m² (b) 2304 kg.m² (c) 3328 kg.m²

<u>OBS</u>: O momento de inércia de uma pequena massa, ao girar ao redor de um eixo y, é dado pelo produto dessa massa pelo quadrado da distância dela ao eixo:

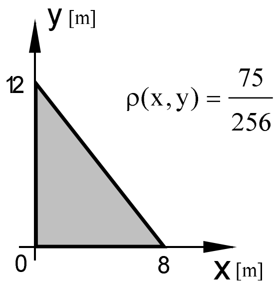


$\Delta I = (\Delta m).x^2$

O momento de inércia de um corpo extenso é a soma dos momentos de inércia de cada uma de suas partes.

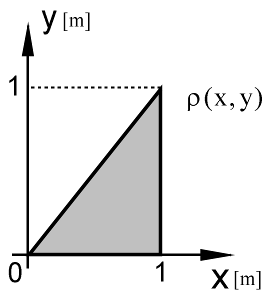
3) Obter a massa total e a densidade média de cada uma das placas abaixo. Nas fórmulas, os valores de x e y estão em metros, e a densidade em kg/m².

(a)



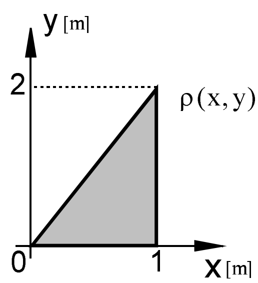
$\rho(x,y) = \frac{75}{256}x^2$

(b)



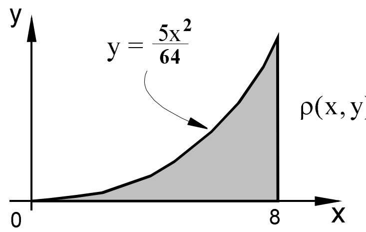
$\rho(x,y) = 5e^{-y}$

(c)



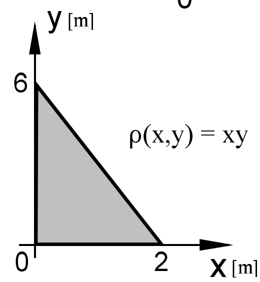
$\rho(x,y) = 3e^{2x}e^{-y}$

(d)



$\rho(x,y) = \frac{5x}{2\sqrt{y}}$

(e)



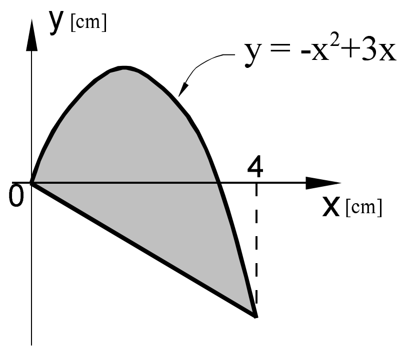
$\rho(x,y) = xy$

Resp: (a) 150 kg ; 3,125 kg/m² (b) 1,84 kg ; 3,68 kg/m² (c)6,58 kg ; 6,58 kg/m² (d) 238,5 kg ; 17,89 kg/m² (e)6kg ; 1 kg/m²

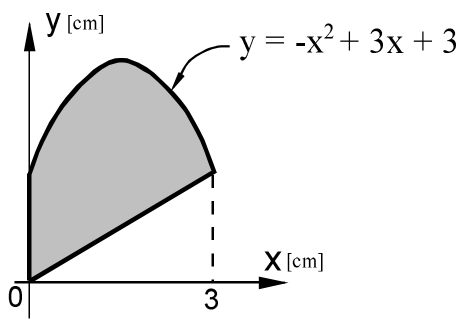
©2003-15 Maurício Fabbri

4) Calcule a massa de cada uma das placas abaixo, supondo que a são homogêneas com densidade $1g/cm^2$.
(resposta com quatro significativos)

(a)

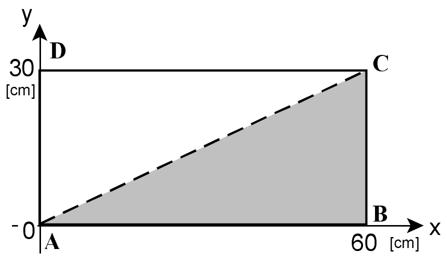


(b)



Resp : (a) 10,67g (b) 9,00g

5) A densidade em cada ponto da placa retangular abaixo é dada por:

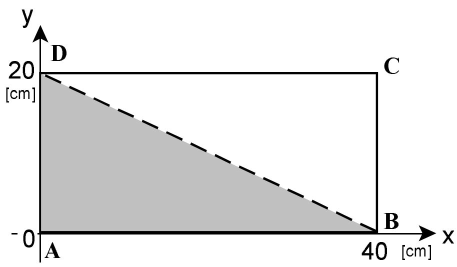


$$\rho(x,y) = 10^{-5}\,xy^2 \quad \begin{cases} (x,y) \text{ em cm} \\ \rho \text{ em kg/cm}^2 \end{cases}$$

(a) Qual a massa total da placa, em kg?
(b) Qual a porcentagem da massa da placa que está abaixo da diagonal AC ?
(correspondente à região triangular ABC)

Resp.: (a) 162kg ; (b) 40%

6) A densidade em cada ponto da placa retangular abaixo é dada por:



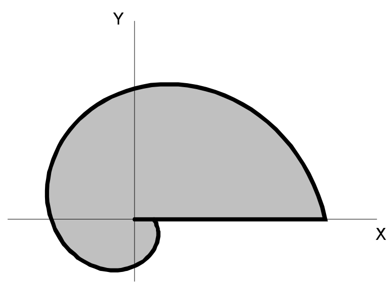
$$\rho(x,y) = 10^{-5}(x^2 + y) \quad \begin{cases} (x,y) \text{ em cm} \\ \rho \text{ em kg/cm}^2 \end{cases}$$

(a) Qual a massa total da placa, em kg?
(b) Qual a porcentagem da massa da placa que está abaixo da diagonal BD ?
(correspondente à região triangular ABD)

Resp: (a) 4,35kg (b) 25,2%

7) Encontre a área da placa abaixo, que tem a sua borda descrita, em coordenadas polares, por

$r = e^{-\frac{\theta}{2\pi}}$, r em metros e $0 \leq \theta < 2\pi$ (radianos)



Resp.: $S = \dfrac{\pi}{2}(1 - e^{-2}) \cong 1{,}358$

©2003-15 Maurício Fabbri

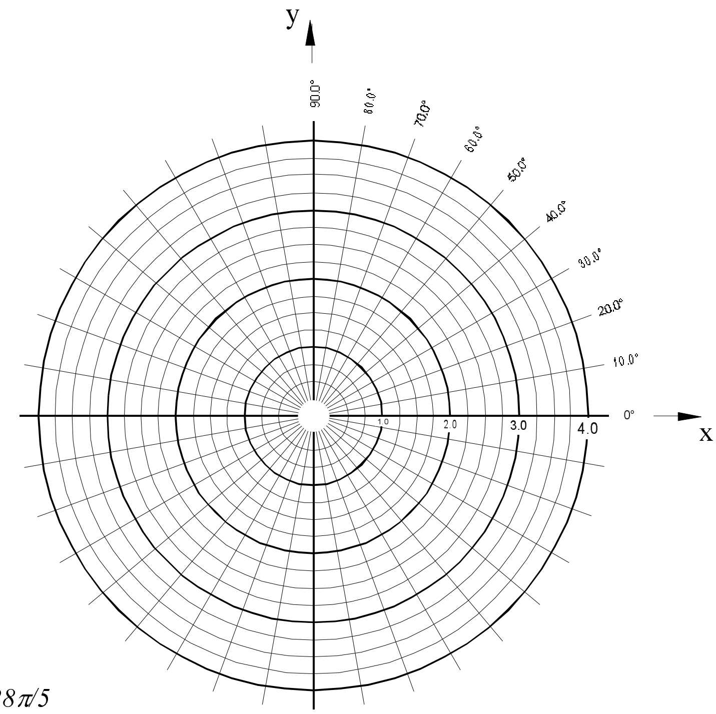
8) Uma placa tem a sua borda descrita, em coordenadas polares, pela equação:

$$r = 2\theta / \pi \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad , \ \theta \ \text{em radianos}$$

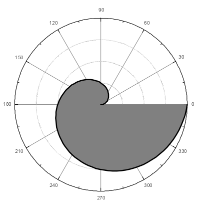
(a) Faça um esboço da placa, utilizando as escalas polares fornecidas.

(b) Calcule a área dessa placa.

(c) Calcule o momento de inércia da mesma (considerando a placa homogênea com densidade=1) ao girar em torno do eixo z (perpendicular ao plano da placa pela origem).



Resp: (a)



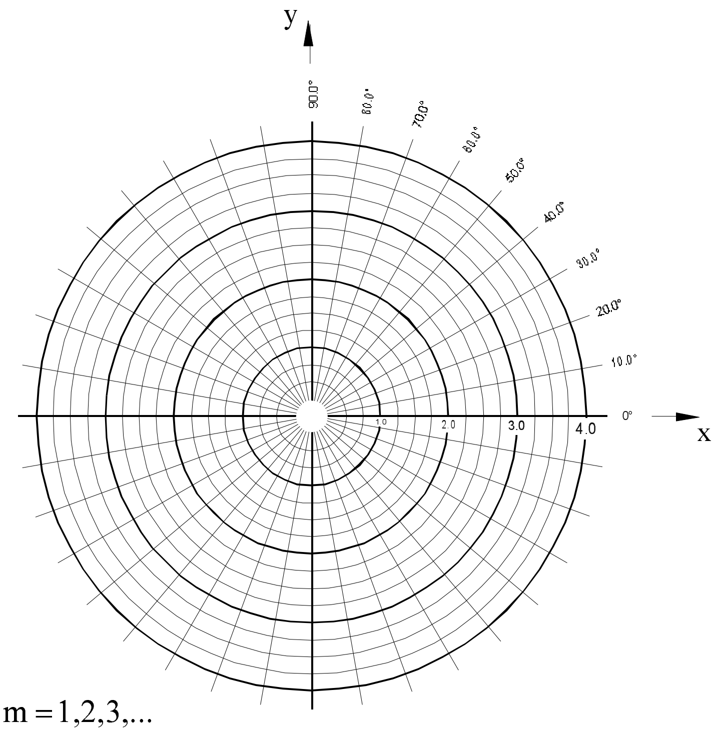
(b) $S = 16\pi/3 \cong 16{,}8$ *(c)* $I_z = 128\pi/5$

9) Uma placa tem a sua borda descrita, em coordenadas polares, pela equação:

$$r = 2(1 + \text{sen}^2\,\theta) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(a) Faça um esboço da placa, utilizando as escalas polares fornecidas.

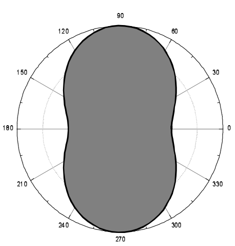
(b) Calcule a área da placa.



DADO:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m}(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \text{sen}^{2m}(\theta)\,d\theta = 2\pi \frac{1.3.5...(2m-1)}{2.4.6...(2m)} \quad , \ \text{para } m = 1,2,3,...$$

Resp.: (a)



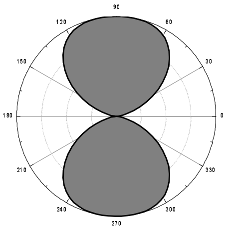
(b) $S = 19\pi/2 \cong 29{,}8$

©2003-15 Maurício Fabbri

10) Repita a questão anterior se a borda da placa é descrita, em coordenadas polares, pela equação:

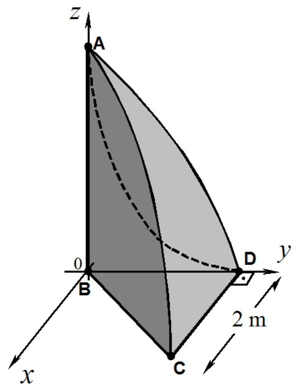
$$r = 4(1-\cos^4\theta) \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Resp.: (a)



(b) $S = 67\pi/8 \cong 26{,}3$

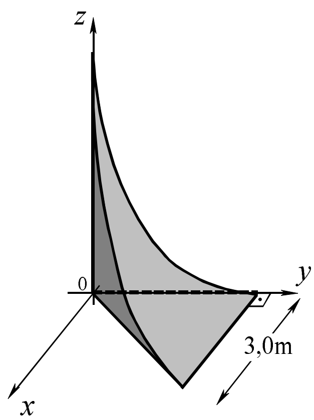
11) Determine o volume do sólido ABCD, sabendo que a superfície curva é descrita por $z = 16 - y^2$.



Resp.: 32

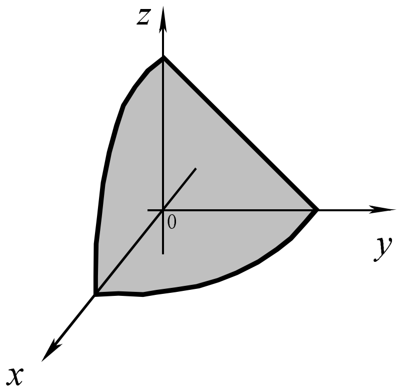
12) Calcule o volume da marquise, em m^3.

A superfície parabólica é dada por $z = \dfrac{(y-5)^2}{5}$. (unidades em metros)



Resp.: 125/8

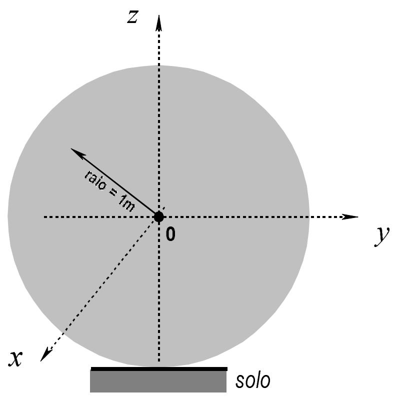
13) Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos x=0, y=0, z=0 e pela superfície $z = 16-2y-x^2$.



Resp.: 2048/15 = 136,5333...

©2003-15 Maurício Fabbri

14) Uma esfera de um metro de raio é preenchida de modo que sua densidade diminui com a altura relativa ao solo (por exemplo, o material no seu interior é compactado sob a ação da gravidade). Utilizando o sistema de coordenadas mostrado na figura, a densidade em cada ponto da esfera é escrita como:

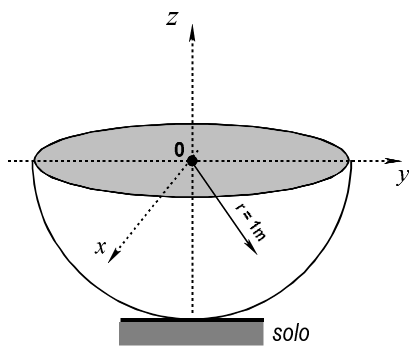


$$\rho = K(1 - z)$$

- Determine o valor da constante K de modo que a massa total da esfera seja 2Ton.

Resp.: K = 3/2π

15) Repita o problema anterior no caso em que o sólido seja apenas o hemisfério inferior de uma esfera de um metro de raio. A densidade em cada ponto é escrita como antes:



$$\rho = K(1 - z)$$

- Determine o valor da constante K de modo que a massa total do sólido seja 2Ton.

Resp.: K = 24/11π

16) Demonstrar, utilizando integração tripla, que o volume do cone reto é igual a um terço do produto de sua altura pela área da base.

Sugestão:

Utilize coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z).
Desenhe o cone com vértice na origem (de "cabeça para baixo"), com o eixo coincidindo com o eixo z.

O interior do cone será então descrito como $\begin{cases} 0 \le \phi < 2\pi \\ 0 \le z \le H \\ 0 \le \rho \le \dfrac{R}{H} z \end{cases}$ *, onde H é a altura e R o raio da base.*

Integre nesse volume, lembrando que $dV = \rho . d\rho . d\phi . dz$

© 2003-15 Maurício Fabbri
http://mauriciofabbri.com.br/
MCT/INPE: http://www.las.inpe.br/~fabbri
Universidade São Francisco – USF
Itatiba/Campinas – http://www.saofrancisco.edu.br
São Paulo - Brazil
Permitido uso livre para fins educacionais,
sem ônus, desde que seja citada a fonte.