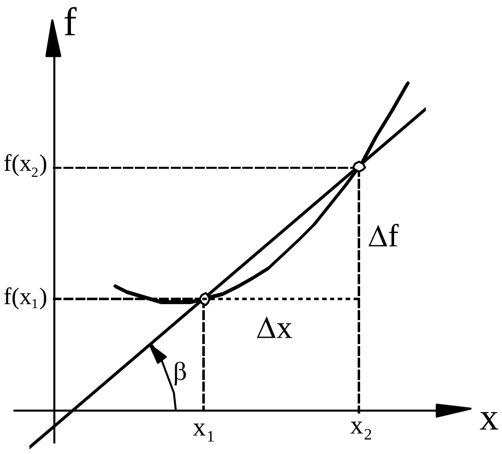
2ª Série de Exercícios

INCREMENTOS E TAXAS DE VARIAÇÃO; LIMITES E CONTINUIDADE
(análise gráfica)



O *incremento* de *f(x)* entre x_1 e x_2 é

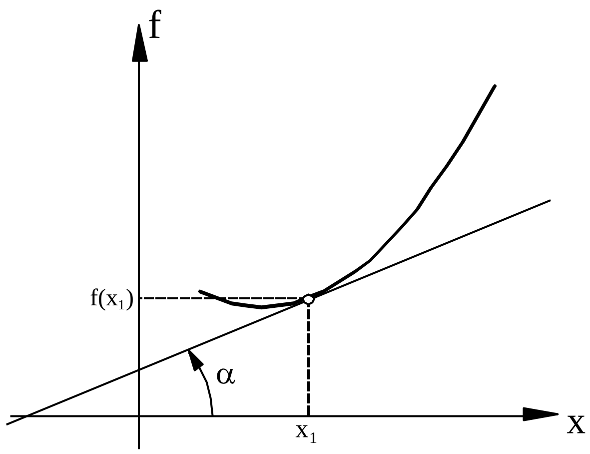
$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

A *taxa média de variação* de *f(x)* entre x_1 e x_2 é

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \tan(\beta)$$

NOTE que essa taxa média <u>depende</u> dos pontos escolhidos.

A taxa média é igual à inclinação da secante que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.



A *taxa instantânea de variação*, ou <u>*derivada*</u> de *f(x)* no ponto x_1 é igual à inclinação da tangente ao gráfico de *f(x)* no ponto $(x_1, f(x_1))$, e pode ser encontrada fazendo

$$\tan(\alpha) = \lim_{x_2 \to x_1} \tan(\beta) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Em cada ponto *x*, a derivada de *f(x)* é definida como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Desse modo, dada uma função *f(x)* definimos a sua função derivada $f'(x)$ como sendo o valor da taxa de variação de *f(x)* no ponto *x*. A derivada de *f(x)* também costuma ser escrita como $\frac{df}{dx}$. A notação de diferenciais *"df "* e *"dx"* indica que estamos trabalhando no limite $\Delta x \to 0$.

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

NOTE que, enquanto as variações "Δ" podem ser calculadas numericamente, os diferenciais "d " exprimem um limite, e não podem ser escritos ou obtidos nem calculados como diferenças numéricas "finitas".

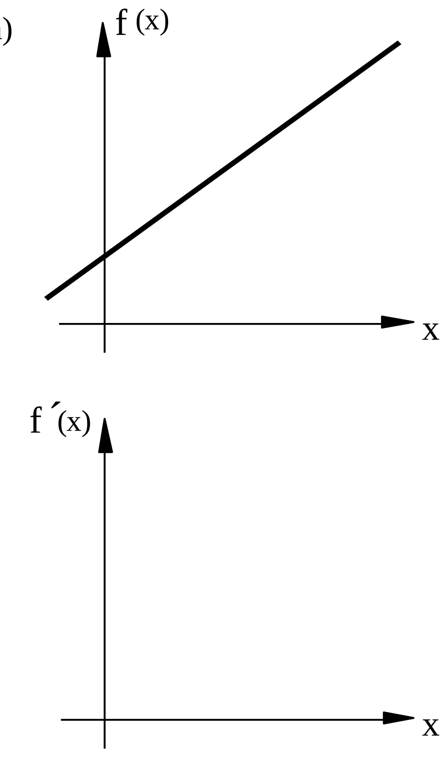
Finalmente, observe que

- $f'(x) > 0$ nos pontos onde f(x) é crescente
- $f'(x) < 0$ nos pontos onde f(x) é decrescente
- $f'(x) = 0$ nos pontos *locais* de máximo, mínimo ou de inflexão horizontal (chamados de *pontos críticos* de *f*).

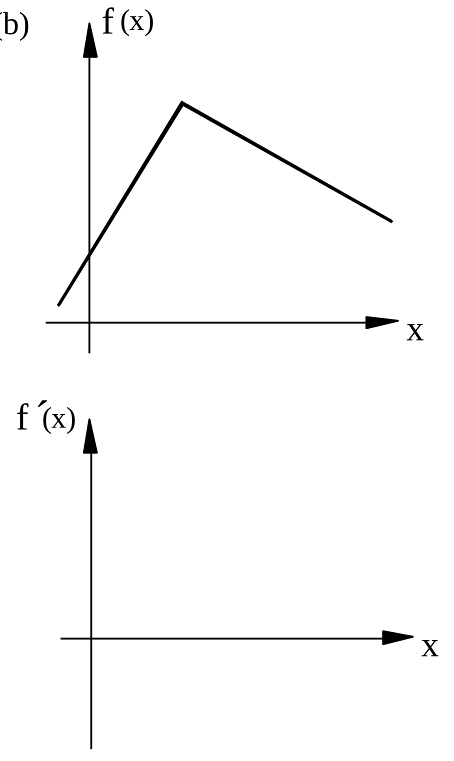
Exercício 1:

Em cada exemplo, esboce o gráfico de $f'(x)$.
Preste especial atenção ao sinal da derivada e aos pontos críticos da função.

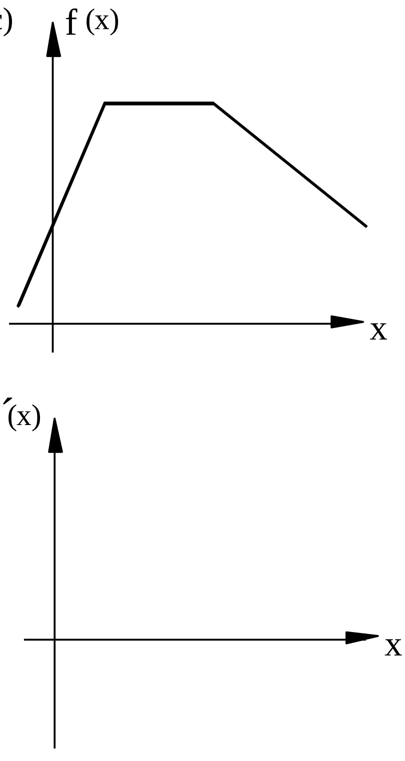
(a)



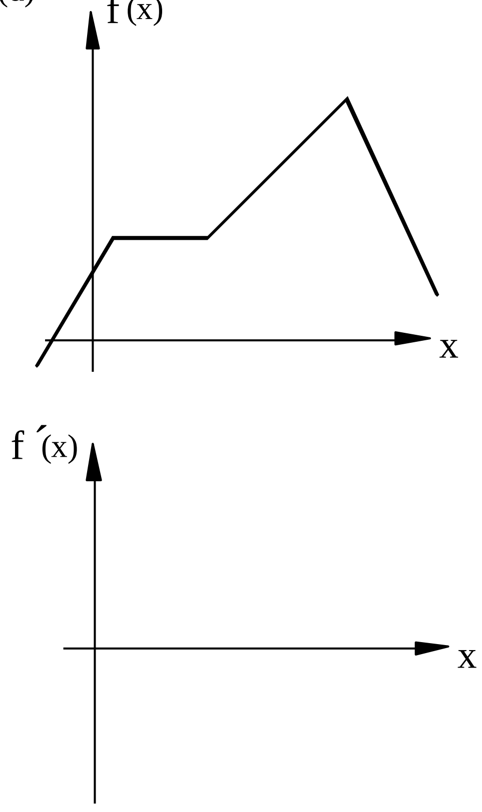
(b)



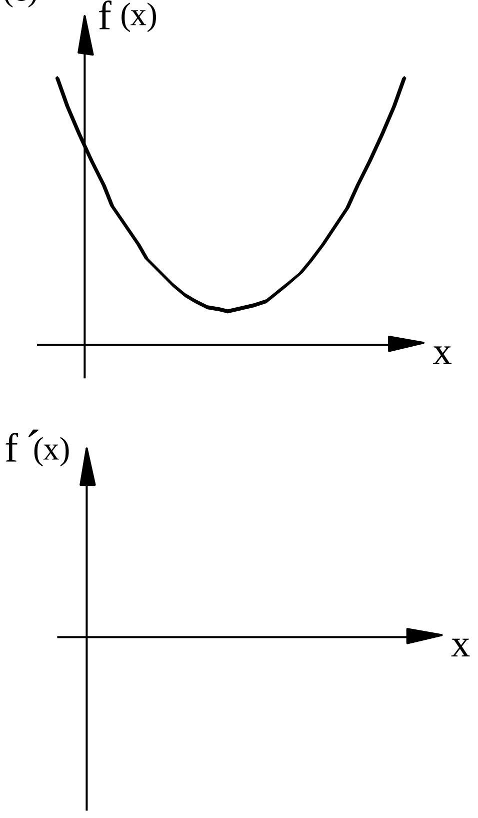
(c)



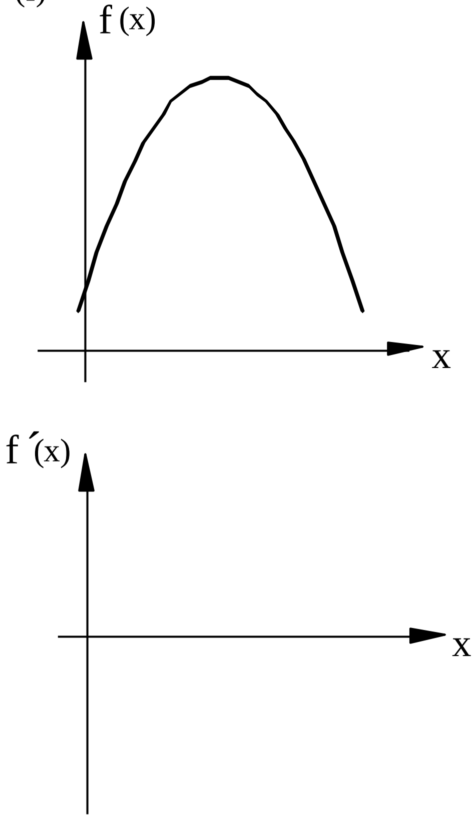
(d)

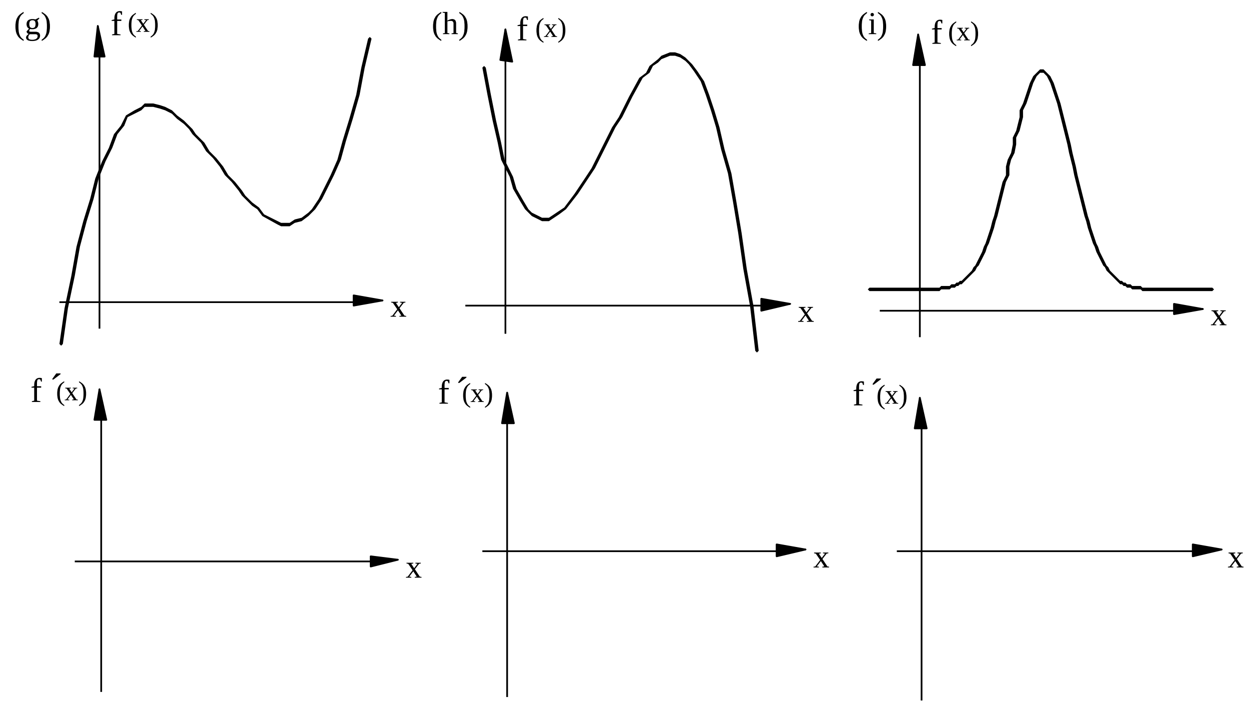


(e)



(f)

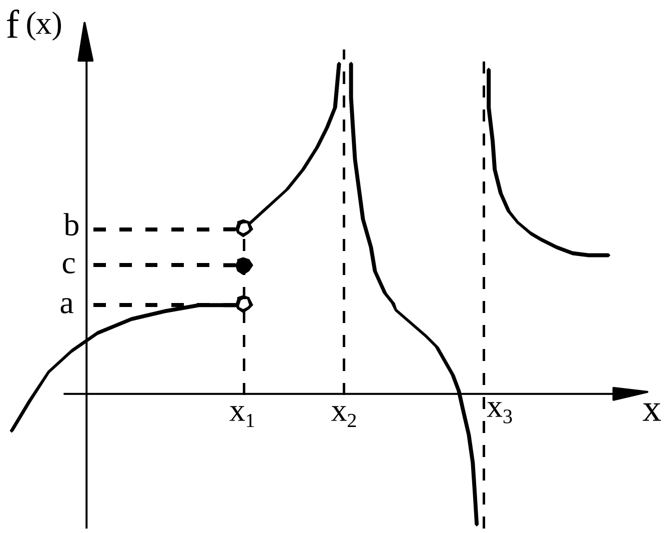




CONTINUIDADE

Uma função *f(x)* é contínua no ponto x_0 se e só se existe $f(x_0)$ e $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Quando uma função *f(x)* é contínua em um ponto x_0, podemos calcular $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ simplesmente substituindo x por x_0 na fórmula da função (a função existe em x_0, não dá "saltos" em x_0 e nem tem "infinitos" no ponto x_0).



No gráfico ao lado, vemos que

$\lim\limits_{x \to x_{1+}} f(x) = b$ $\quad \lim\limits_{x \to x_{1-}} f(x) = a$ $\quad$ e $\quad f(x_1)=c$

Portanto $\nexists \lim\limits_{x \to x_1} f(x)$, *f(x)* é descontínua no ponto x_1.

Também $\nexists \lim\limits_{x \to x_2} f(x)$. Aliás, $\nexists f(x)$ para $x = x_2$.

Podemos escrever, pelo que o gráfico parece indicar, que $\lim\limits_{x \to x_{2-}} f(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x \to x_{2+}} f(x) = +\infty$.

No ponto x_3, o gráfico indica que $\lim\limits_{x \to x_{3-}} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_{3+}} f(x) = +\infty$.

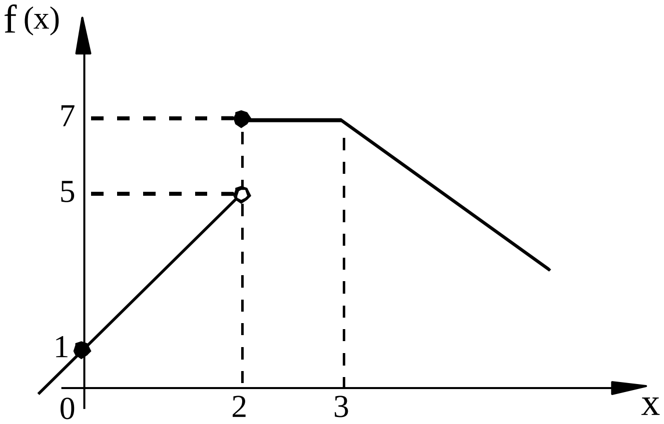
f(x) é descontínua nos pontos x_1, x_2 e x_3.

f(x) parece ser contínua em qualquer ponto $x \notin \{x_1, x_2, x_3\}$.

(dizemos "*parece ser*" porque um gráfico não é capaz de indicar todas as informações a respeito de *f(x)*).

Exercício 2:

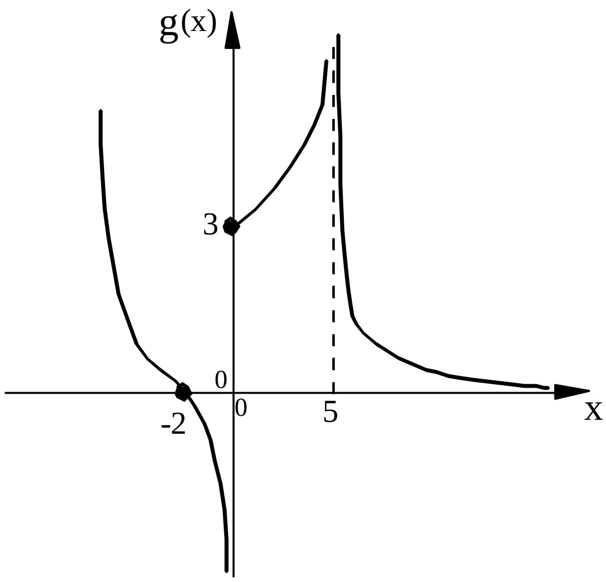
Quais os valores dos limites pedidos? *(siga apenas a indicação dos gráficos)*



$\lim_{x\to 2_+} f(x) =$ $\lim_{x\to 2_-} f(x) =$ $\lim_{x\to 2} f(x) =$

$\lim_{x\to 3_+} f(x) =$ $\lim_{x\to 3_-} f(x) =$ $\lim_{x\to 3} f(x) =$

$\lim_{x\to 0} f(x) =$

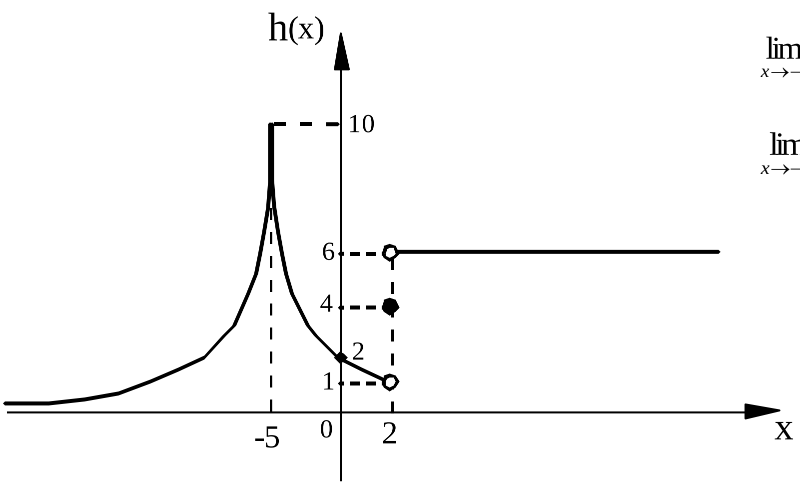


$\lim_{x\to -\infty} g(x) =$ $\lim_{x\to -2} g(x) =$

$\lim_{x\to 0_-} g(x) =$ $\lim_{x\to 0_+} g(x) =$

$\lim_{x\to 5_-} g(x) =$ $\lim_{x\to 5_+} g(x) =$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) =$



$\lim_{x\to -\infty} h(x) =$

$\lim_{x\to -5_-} h(x) =$ $\lim_{x\to -5_+} h(x) =$ $\lim_{x\to -5} h(x) =$

$\lim_{x\to 0} h(x) =$

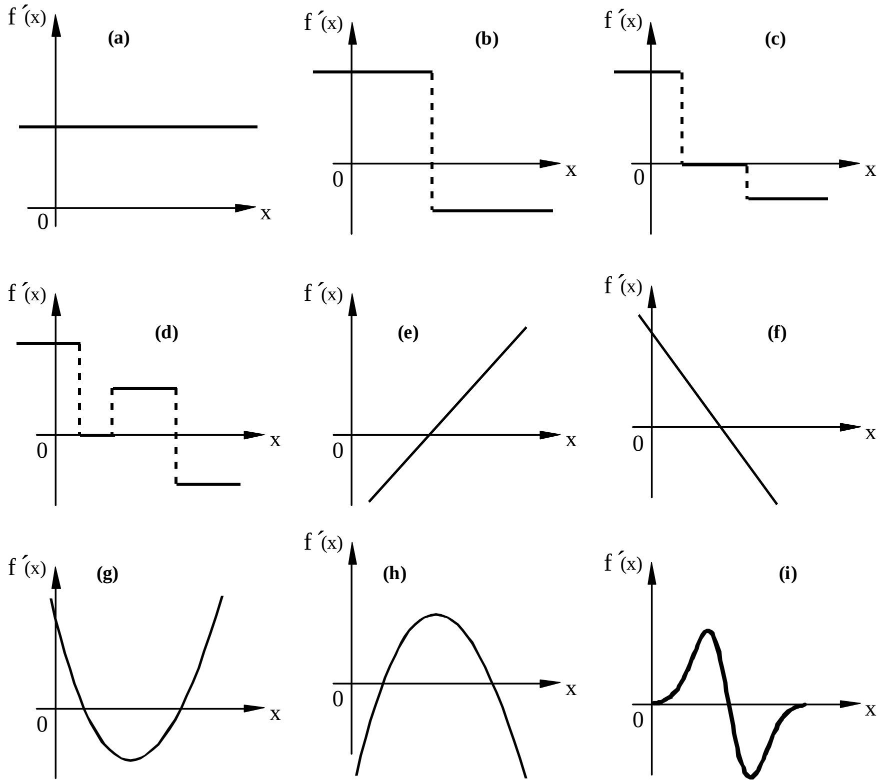
$\lim_{x\to 2_-} h(x) =$ $\lim_{x\to 2_+} h(x) =$ $\lim_{x\to 2} h(x) =$

h(2) =

$\lim_{x\to 10} h(x) =$ $\lim_{x\to +\infty} h(x) =$

RESPOSTAS

Exercício 1:



Exercício 2:

$\lim\limits_{x\to 2_+} f(x)=7$ $\lim\limits_{x\to 2_-} f(x)=5$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\nexists$ $\lim\limits_{x\to 3_+} f(x)=7$ $\lim\limits_{x\to 3_-} f(x)=7$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=7$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0_-} g(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0_+} g(x)=3$ $\lim\limits_{x\to 5_-} g(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 5_+} g(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=0$ $\lim\limits_{x\to -5_-} h(x)=10$ $\lim\limits_{x\to -5_+} h(x)=10$ $\lim\limits_{x\to -5} h(x)=10$ $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 2_-} h(x)=1$ $\lim\limits_{x\to 2_+} h(x)=6$ $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\nexists$ $h(2)=4$ $\lim\limits_{x\to 10} h(x)=6$ $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=6$
