CÁLCULO I

1º Semestre de 2012

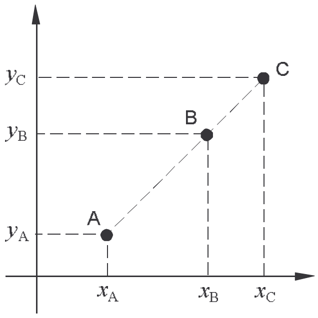
Prof. Maurício Fabbri

© 2004,2012

1ª Série de Exercícios

Inclinação da reta e tangentes; taxas de variação

(I) Alinhamento de pontos



Se três pontos estão alinhados, então

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

e também vale qualquer outra proporção entre segmentos correspondentes (seguindo o teorema de Tales); por exemplo:

$$\frac{y_C - y_B}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_B}{x_B - x_A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Exercício 1: Marque no plano o ponto M, ponto médio entre P(2,3) e Q(4,7).

Exercício 2: (a) Encontre o valor de x para que os pontos (1,2), (2,4) e (x,8) estejam alinhados.
(b) Encontre o valor de y para que os pontos (0,1), (2,y) e (3,10) estejam alinhados.
(c) Encontre os valores de x e y para que os pontos (x,2), (2,–4), (3,y) e (4,–10) estejam alinhados.

Exercício 3: São dados quatro pontos A(0,0), B(4,3), C(3,–2) e D(–2,–3). Encontre as coordenadas dos pontos:

(a) P, que está na intersecção de $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$;
(b) Q, que está na intersecção de $\overline{AC}$ com $\overline{BD}$;
(c) R, que está na intersecção de $\overline{AD}$ com $\overline{BC}$;

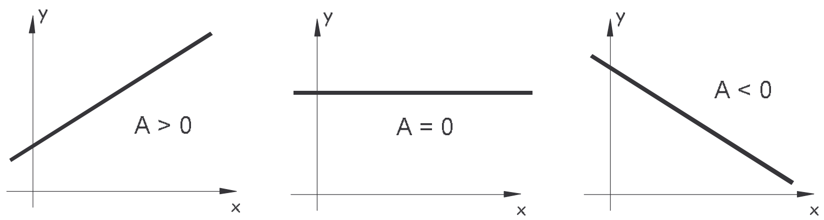
Exercício 4: Determine a relação entre x e y de modo que o ponto (x,y) esteja alinhado com os pontos (1,3) e (5,11).

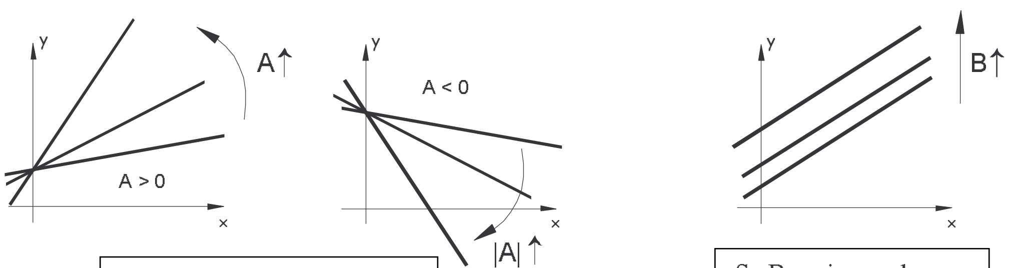
(II) A equação da reta (função linear ou afim)

$$\boxed{y = Ax + B}$$

A = inclinação da reta (coeficiente angular)
B = ponto de zero ("offset")

(se a reta for paralela ao eixo y, sua equação será $x = x_0$)

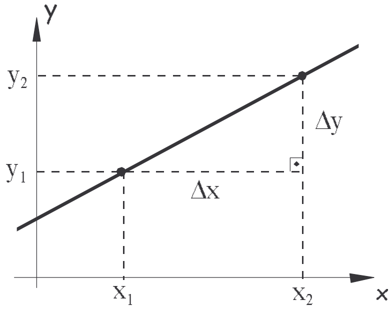




Se |A| aumenta, a reta varia mais rapidamente

Se B varia, mudamos apenas o "offset"

© MFabbri 2004, 2012



Se uma reta passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2),

sua inclinação será $A = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Exercício 5: Determine a equação da reta que passa pelos pontos: (a) (1,2) e (7,8) (b) (1,2) e (–1,4)

Exercício 6: A coluna de um termômetro de mercúrio tem 15cm de altura a 25°C e 27cm a 35°C. Supondo que a altura da coluna aumenta linearmente com a temperatura,

(a) Escreva a fórmula que dá a altura da coluna de mercúrio em função da temperatura;
(b) Qual será a altura da coluna quando a temperatura for de 43 °C ?
(c) Qual a temperatura em que a altura da coluna é de 20cm ?
(d) Se a escala do termômetro tiver um total de 80cm de comprimento, quais as temperaturas máxima e mínima que ele será capaz de medir?

Exercício 7: O gradiente de temperatura ao longo de uma barra de Alumínio de 2,5m de comprimento é de 1,8°C/cm. A temperatura da extremidade fria é 80°C.

(a) Qual a temperatura na extremidade quente?
(b) Escreva a fórmula que dá a temperatura em uma posição da barra em função da distância à extremidade fria. *(suponha que a extremidade fria está na posição 0)*
(c) Qual a temperatura no meio da barra?
(d) Em que posição a temperatura é de 250°C?

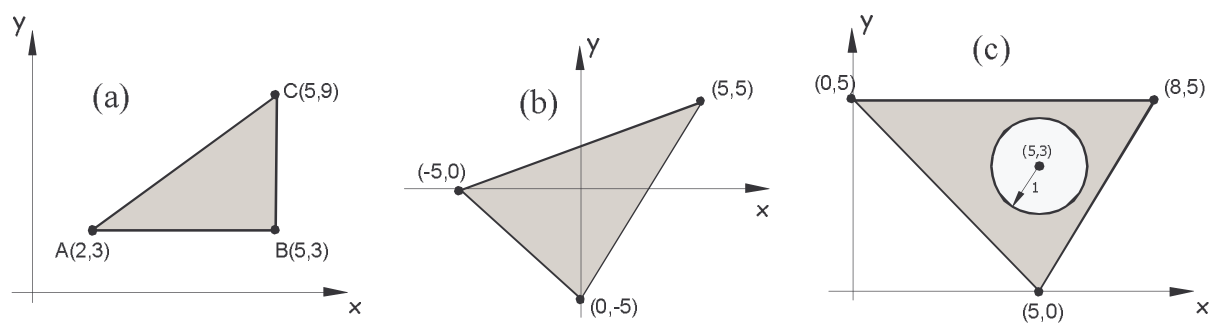
Exercício 8: O rebanho de um fazendeiro A conta com quinhentas cabeças, e cresce à razão de cinqüenta cabeças por ano. Já o rebanho de um outro fazendeiro B conta com mil cabeças, mas cresce apenas à razão de vinte cabeças por ano. Supondo que essas taxas de crescimento se mantenham, depois de quanto tempo os dois rebanhos terão o mesmo tamanho? Quantas cabeças teríamos então em cada rebanho?

Exercício 9: Um recipiente contém mil litros de água, mas está aberto e a água evapora à taxa de cinco litros por dia. Em um outro recipiente, há duzentos litros de solvente, que absorve água da atmosfera, de modo que seu volume aumenta à taxa de dois litros por dia. Se essas taxas permanecerem fixas, depois de quanto tempo os dois recipientes terão o mesmo volume de líquido? Nesse instante, quantos litros teríamos em cada recipiente?

Exercício 10: Marque as seguintes regiões no plano R^2:

(a) $(x,y) \in R^2 \mid (x+1) \le y \le (7-x)$ e $x \ge 1$
(b) $(x,y) \in R^2 \mid (8 - x) \le y \le x$ e $y \ge (3x - 12)$

Exercício 11: Escreva as condições que as coordenadas (x,y) de um ponto devem satisfazer para que ele pertença à região sombreada:



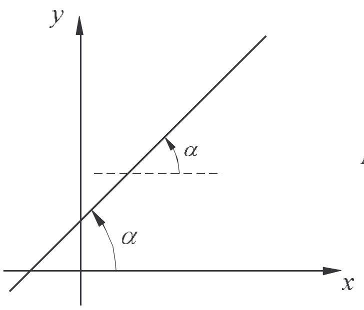
© MFabbri 2004, 2012

Exercício 12: A figura ABCD é um losango. Se A(0,0), B(3,5) e C(1,9), quais são as coordenadas do vértice D?

Sugestão: utilize o ponto de encontro das diagonais.

Exercício 13: Encontre as coordenadas dos vértices de um triângulo ABC, sabendo que os pontos médios de seus lados estão em P(1,0), Q(7,–2) e R(0,4).

(III) Inclinação e tangentes



A = tan(α) = inclinação da reta (coeficiente angular)

Exercício 14: Esboce no plano cartesiano retas que passem pelo ponto (2,1) e tenham inclinações

(a) 0, 1, 2, 5, 10 e 20
(b) −2 e 2
(c) 2 e −1/2
(d) 0 e ∞

Exercício 15: (a) Encontre a inclinação da secante à parábola $y = x^2$ que passe pelos pontos (1,1) e $((1+\delta), (1+\delta)^2)$, para δ = 1, 0,5, 0,01 e 0,001.
(b) qual deve ser a inclinação da tangente à parábola $y = x^2$ pelo ponto (1,1) ?
(c) descreva um método numérico para estimar a inclinação da tangente à curva que representa uma função y = f(x) pelo ponto (x_0, y_0).
(d) aplique seu método à função $y = x^3$ pelo ponto (1,1).

Exercício 16: Uma antena de telefone celular de 50m está bem no topo de uma montanha de 400m de altura, cujo perfil é descrito pela parábola $h = 400 - x^2$. Uma anta escala a montanha, a partir do solo (h = 0). A que altura a anta começa a enxergar a torre?
(retirado de http://ocw.mit.edu/OcwWeb/web/courses/courses/index.htm)

(Sugestão: usando a técnica desenvolvida no exercicio 15, obtenha a inclinação da reta tangente a um ponto qualquer do perfil da montanha)

(IV) A equação geral da reta

Qualquer reta no plano (x,y) pode ser descrita por uma relação do tipo

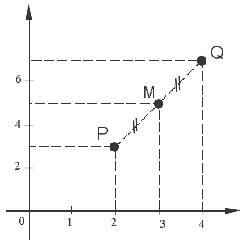
$$\boxed{ax+by+c = 0}$$

- se a reta for paralela ao eixo y, teremos b=0
- se a reta for paralela ao eixo x, teremos a=0
- se c = 0, a reta passa pela origem (0,0)
- nessa forma, a inclinação da reta será –a/b

© MFabbri 2004, 2012

RESPOSTAS

1.



$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = 3$$
$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} = 5$$

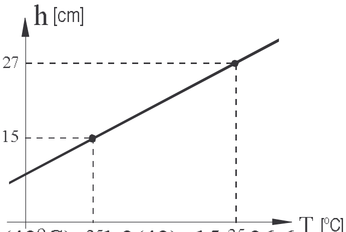
2. (a) $x = 4$ (b) $y = 7$ (c) $x = 0$ $y = -7$

3. (a) $(-52/11\ ,\ -39/11)$ (b) $(3/5\ ,\ -2/5)$ (c) $(34/7\ ,\ 51/7)$

4. $y = 2x + 1$

5. (a) $y = x + 1$ (b) $y = 3 - x$

6. (a)



$h = AT + B$

$$A = \frac{\Delta h}{\Delta T} = \frac{27-15}{35-25} = 1{,}2\ \text{cm}/^\circ\text{C}$$

$h = 1{,}2T + B$

$15 = 1{,}2(25) + B \Rightarrow B = -15$

$$\boxed{h = 1{,}2T - 15 \quad \begin{cases} T \text{ em } ^\circ C \\ h \text{ em cm} \end{cases}}$$

(b) $h(43^\circ C) = 1{,}2(43) - 15 = 36{,}6$cm

(c) $20 = 1{,}2T - 15 \Rightarrow T = 29{,}2^\circ C$

(d) no mínimo, teremos $h = 0 \Rightarrow 0 = 1{,}2T - 15 \Rightarrow T_{min} = 12{,}5^\circ C$
no máximo, teremos $h = 80$cm $\Rightarrow 80 = 1{,}2T - 15 \Rightarrow T_{max} = 79{,}2^\circ C$

7. (a) como a temperatura varia 1,8°C em cada cm, e a barra tem 2,5m = 250cm, segue que a temperatura na extremidade quente é de $1{,}8 \times 250 = 530^\circ C$.

(b) posicionando a barra de modo que a extremidade fria esteja em x = 0 e que a extremidade quente esteja ao longo do eixo x e na direção de x positivo, teremos

$$T = 1{,}8x + 80 \quad \begin{cases} x \text{ em cm} \\ T \text{ em } ^\circ C \end{cases}$$

(c) como a variação é linear, a temperatura no meio da barra pode ser encontrada por uma média aritmética simples (ou seja, a temperatura no meio é o "meio" da temperatura…):

$$T_M = \frac{530 + 80}{2} = 305^\circ\ C$$

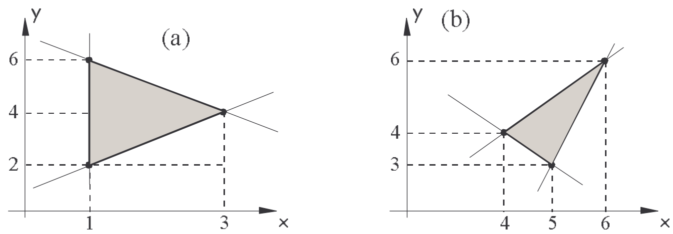
(confira que o resultado é o mesmo se voce utilizar a equação encontrada no item anterior)

(d) 94,4cm

8. 16anos e 8 meses ; cerca de 1330 cabeças

9. 114 dias e 7 horas ; 429 litros

10.

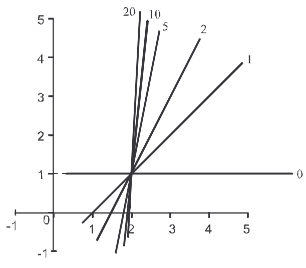


11. (a) $(x,y) \in R^2 \mid 3 \le y \le (2x-1)$ e $x \le 5$
(b) $(x,y) \in R^2 \mid (-x-5) \le y \le (x+5)/2$ e $y \ge (2x-5)$
(c) $(x,y) \in R^2 \mid (5-x) \le y \le 5$ e $y \ge 5(x-5)/3$ e $(x-5)^2+(y-3)^2 \ge 1$

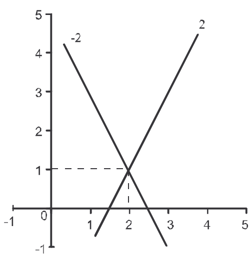
12. D(4, 14)

13. (6,2) , (–6, 6) e (8, –6)

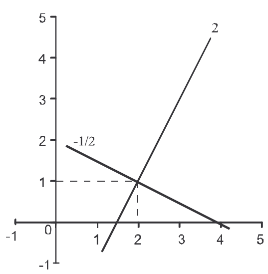
14. (a)



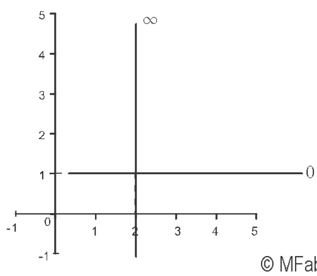
(b)



(c)



(d)



© MFabbri 2004, 2012

15. (a) 3 ; 2,5; 2,01 ; 2,001   (b) 2   (d) 3

16. 350m

© 2004, 2012 Maurício Fabbri
MCT/INPE: http://www.las.inpe.br/~fabbri
Universidade São Francisco – USF
Itatiba/Campinas – http://www.saofrancisco.edu.br
São Paulo - Brazil
Permitido uso livre para fins educacionais,
sem ônus, desde que seja citada a fonte.