Cálculo Aplicado à Engenharia Elétrica

1° Semestre de 2011

Prof. Maurício Fabbri

5ª Série de Exercícios

O TEOREMA DO DIVERGENTE (GAUSS)

1. Campos escalares e campos vetoriais

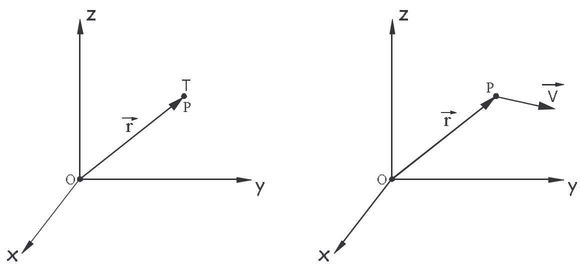
(i) *Campo* é uma grandeza física distribuída no espaço. Quando essa grandeza puder ser descrita por um único número, dizemos que se trata de um *campo escalar*.

Por exemplo, a distribuição de temperatura em uma sala pode ser descrita por uma função T(P), significando que a temperatura T varia conforme o ponto P em que é medida.

Um outro exemplo é a distribuição de potencial elétrico V(P) em uma região Ω do espaço.

(ii) Um campo vetorial descreve como uma grandeza física de natureza vetorial se distribui pelo espaço.

Por exemplo, a distribuição de velocidade da água em um rio pode ser descrita por uma função $\vec{V}(P)$. O campo elétrico em cada ponto P de uma região do espaço pode ser descrito por uma função $\vec{E}(P)$.

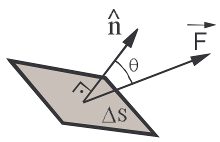


Em relação a um sistema de coordenadas com origem O, podemos localizar o ponto P através de seu vetor posição $\vec{r}$. O campo escalar T será então descrito pela função $T(\vec{r})$, e o campo vetorial $\vec{V}$ pela função $\vec{V}(\vec{r})$.

Como o campo vetorial pode ser descrito pelas suas componentes, a função $\vec{V}(\vec{r})$ equivale a três funções escalares. Por exemplo, em coordenadas cartesianas, teríamos $\vec{V} = V_x\hat{\mathbf{i}} + V_y\hat{\mathbf{j}} + V_z\hat{\mathbf{k}}$. A função $\vec{V}(\vec{r})$ pode ser descrita por três funções escalares, $V_x(P)$, $V_y(P)$ e $V_z(P)$.

OBS.: O contrário não é verdadeiro: pode-se mostrar que três funções escalares nem sempre podem ser interpretadas como componentes de um campo vetorial.

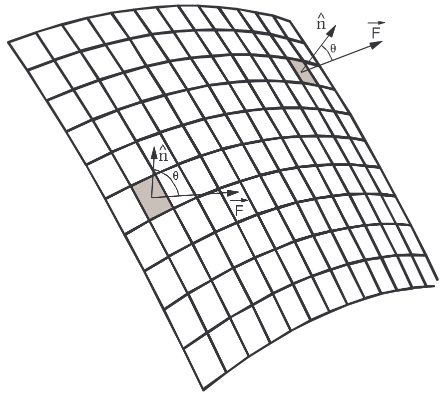
2. Fluxo de um campo vetorial



Seja ΔS uma pequena área plana cuja normal está ao longo do versor $\hat{n}$.

Definimos o fluxo do vetor $\vec{F}$ através de ΔS por $\Delta\Phi = F.\Delta S.\cos\theta = (\vec{F}\cdot\hat{n})\Delta S$

Se $\vec{F}$ for um campo vetorial e S uma superfície qualquer, podemos dividir a área S em pequenos elementos ΔS e calcular o fluxo de $\vec{F}$ através de cada ΔS , como ao lado. Uma vez que $\vec{F}$ e a normal $\hat{n}$ em geral variam ponto a ponto, o valor do fluxo de $\vec{F}$ através de S será o limite da soma dos pequenos fluxos quando $\Delta S \to 0$. A notação matemática para esse procedimento é assim:

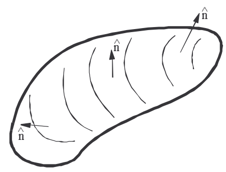


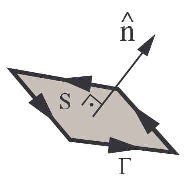
$$\Phi = \sum \Delta\Phi \cong \sum (\vec{F}\cdot\hat{n})\Delta S = \lim_{\Delta s \to 0} \sum (\vec{F}\cdot\hat{n})\Delta S = \int_S (\vec{F}\cdot\hat{n})dS$$

Quando a superfície S é fechada, escrevemos $\Phi = \oint_S (\vec{F}\cdot\hat{n})dS$

Há uma convenção matemática para escolher o sentido do versor normal à superfície, como segue:

- se S for fechada, $\hat{n}$ aponta para fora de S



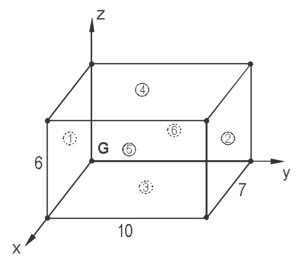


- se S for aberta, escolhemos um sentido de circulação para o contorno Γ de S e o sentido de $\hat{n}$ é dado pela regra da mão direita (ou então, pela regra seguinte: se voce fica de pé sobre o contorno Γ, alinhado com $\hat{n}$, então quando voce caminha sobre Γ o interior de S deve ficar à sua esquerda)

NOTE que, se o valor do campo vetorial $\vec{F}$ permanece constante sobre S, e se o ângulo entre $\vec{F}$ e a normal $\hat{n}$ também não varia, então o fluxo é calculado facilmente, pois nesse caso, $\int_S (\vec{F}\cdot\hat{n})dS = F.S.\cos\theta$.

Exercício 1) Seja Ω o paralelepípedo da figura, e S a superfície que o envolve. Calcule o fluxo $\oint_S (\vec{E}\cdot\hat{n})dS$ quando o campo $\vec{E}$ for dado por

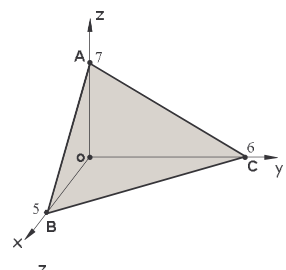
(a) $\vec{E} = 5\hat{\mathbf{j}}$ (b) $\vec{E} = (x+2)\hat{\mathbf{i}}$ (c) $\vec{E} = (x+2)(6-z)\hat{\mathbf{k}}$



Resp.: (a) 0 (b) 420 (c) −2310

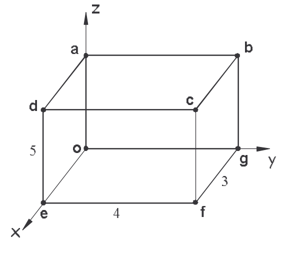
Exercício 2) Qual a intensidade do fluxo do campo $\vec{E} = 3\hat{\boldsymbol{i}} - 2\hat{\boldsymbol{j}} + 4\hat{\boldsymbol{k}}$ através da superfície ABC? *A origem (0,0,0) está no ponto O.*

Resp.:88

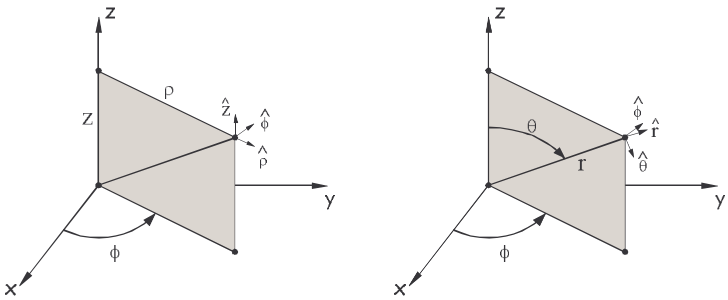


Exercício 3) Seja Ω o volume do paralelepípedo mostrado ao lado, e S a superfície que o envolve. Calcule o fluxo do campo $\vec{E} = 5x^2y\hat{\boldsymbol{i}} + 2(y+1)x\hat{\boldsymbol{j}} - 3y(z+2)\hat{\boldsymbol{k}}$ através da tampa superior abcd. *A origem (0,0,0) está no ponto O.*

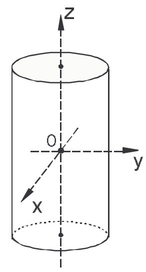
Resp.: −45



Versores nos sistemas cilíndrico e esférico



Os versores de direção estão ao longo das direções seguidas quando a coordenada correspondente aumenta de valor, mantendo as outras constantes. Observe que os versores, tanto no sistema cilíndrico como no esférico, são ortogonais entre si, mas as suas direções variam ponto a ponto.



Exercício 4) Seja Ω o cilindro da figura, com altura 10 e raio da base 2. Ele está alinhado com o eixo z, e a origem do sistema de coordenadas está no seu centro O. Seja S a superfície que envolve o cilindro. Calcule o fluxo $\oint_S (\vec{E}\cdot\hat{n})dS$ quando o campo $\vec{E}$ for dado por

(a) $\vec{E} = z\hat{\mathbf{k}}$ (b) $\vec{E} = \frac{5}{2}\rho\hat{\phi}$ (c) $\vec{E} = \frac{5}{2}\rho\hat{\rho}$ (d) $\vec{E} = 5\rho\cos(\phi/4)\hat{\rho}$

Resp.: (a) 40π (b)0 (c) 200π (d) 800

Exercício 5) Seja Ω uma esfera com o centro na origem e raio 10, e S a superfície que a envolve. Calcule o fluxo $\oint_S (\vec{E}\cdot\hat{n})dS$ quando o campo $\vec{E}$ for dado por

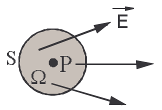
(a) $\vec{E} = 2\hat{r}$ (b) $\vec{E} = 5r\hat{\phi}$ (c) $\vec{E} = \frac{1}{r^2}\cos(\theta/2)\hat{\theta}$ (d) $\vec{E} = \frac{5}{r^2}\cos(\theta/2)\hat{r}$

Resp.: (a) 800π (b)0 (c)0 (d) 40π/3

Exercício 6) Uma antena possui um diagrama de irradiação a longa distância dado por $p = K\frac{P}{r^2}\cos^2\theta$, onde P é a potência total irradiada e r é a distância à antena. (p é a intensidade de irradiação em W/m^2). Calcule o valor de K.

Resp.: 3/2π

2. O divergente de um campo vetorial



Considere um pequeno volume Ω ao redor de um ponto P, numa região onde existe um campo vetorial $\vec{E}$. Para Ω suficientemente pequeno, pode-se mostrar que fluxo de $\vec{E}$ através da superfície S que envolve Ω deve ser proporcional ao volume de Ω. Definimos então o divergente do campo $\vec{E}$ como sendo

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \lim_{\Omega\to 0} \frac{\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS}{\Omega}$$

O divergente também costuma ser escrito como $\nabla\cdot\vec{E}$.
(∇ é um operador matemático, chamado de "nabla")

Note que o divergente é a densidade volumétrica de fluxo do campo. (fluxo/volume)

O valor do divergente de $\vec{E}$ depende do ponto onde é calculado. Portanto, $\nabla \cdot \vec{E}$ é um campo escalar definido a partir de um campo vetorial.

Podemos obter uma fórmula para calcular o divergente para o sistema de coordenadas em que se trabalha:

coordenadas cartesianas (x,y,z) : $$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

coordenadas cilíndricas (ρ,ϕ,z) : $$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

coordenadas esféricas (r, θ,ϕ) : $$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta \mathrm{sen}\theta) + \frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

Essas fórmulas podem ser obtidas tomando-se um pequeno volume Ω com forma adequada ao sistema de coordenadas desejado, calculando-se o fluxo Φ de um campo qualquer através da superfície que envolve esse volume e calculando o limite de Φ/Ω quando $\Omega \to 0$.

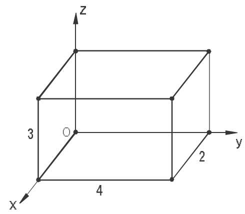
2. O teorema do divergente (Gauss)

Sendo o divergente uma densidade volumétrica de fluxo, é óbvio (☺) que

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{E}\, d\Omega$$

Ou seja, o fluxo através de uma superfície fechada é igual à integral do divergente dentro do volume envolvido por essa superfície.

Exercício 7 **)** Considere o campo $\vec{E} = 2x\hat{\mathbf{i}} + 3y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, e seja Ω o paralelepípedo indicado ao lado. A origem do sistema de coordenadas está no ponto O. Calcule o fluxo de $\vec{E}$ através da superfície que envolve Ω, (a) diretamente, somando o fluxo em cada face, e (b) pelo teorema de Gauss.

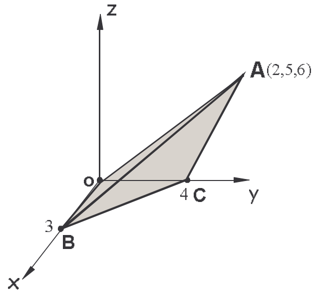


Resp.: 144

Exercício 8 **)** Considere novamente o paralelepípedo da questão anterior, e o campo $\vec{V} = x^2\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Calcule o fluxo de $\vec{V}$ através da superfície que envolve Ω pelo teorema de Gauss.

Resp.: 96

Exercício 9 **)** Use o teorema do divergente para calcular $\oiint_S (2x\,\hat{\boldsymbol{i}} - 3y\,\hat{\boldsymbol{j}} - z\,\hat{\boldsymbol{k}}) \cdot \hat{n} dS$, onde S é a superfície que envolve a pirâmide ABCO. O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura. *A origem (0,0,0) está no ponto O.*



Resp.: −24