EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES A COEFICIENTES CONSTANTES

1. Preliminares

Procura-se uma função x(t) que satisfaça $\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + b.x = u(t)$ para $t > 0$, onde u(t) é uma função conhecida.

Na linguagem de sistemas de controle, u(t) é a entrada *(excitação)* e x(t) é a saída *(resposta)*.

Prova-se que a solução x(t) é única se conhecemos as condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

u(t) também é chamada de *função forçante*.

Quando $u(t) \equiv 0$, a e.d. é homogênea : $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$. Neste caso, x(t) é a *resposta natural* do sistema.

Em termos matemáticos, a resposta natural é a solução da e.d. *homogênea associada* $\ddot{x}_h + a\dot{x}_h + bx_h = 0$

A *resposta do sistema* $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u(t)$ é a soma da *resposta natural* com uma *resposta forçada* $x_p(t)$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

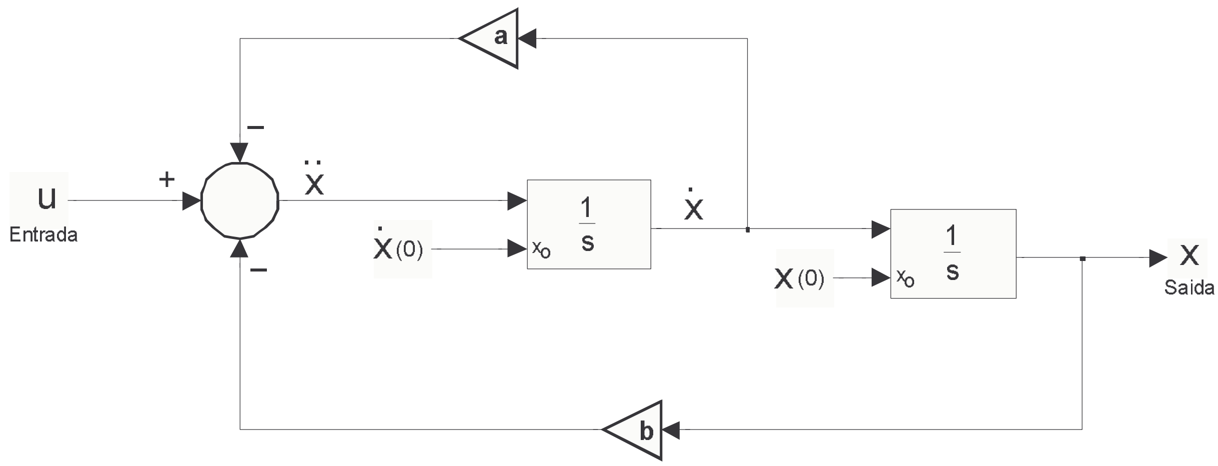
A resposta forçada deve satisfazer $\ddot{x}_p + a\dot{x}_p + bx_p = u(t)$. $x_p(t)$ não depende das condições iniciais.

Se o sistema é estável, a resposta natural decai para zero com o tempo, e é chamada de *transiente*: $\lim_{t\to\infty} x_h(t) = 0$.
Nesse caso, a solução de *regime* (que permanece com o tempo) é a resposta forçada $x_p(t)$.

2. Simulação com o MATLAB

Podemos usar o SIMULINK para obter numericamente a solução da equação diferencial, montando um diagrama de blocos com integradores e ganhos adequados.

Escrevendo $\ddot{x} = u - a\dot{x} - bx$, podemos ligar a entrada u(t) com a saída x(t) através do diagrama abaixo:



NOTE que as condições iniciais devem ser fornecidas a cada integrador.

ATIVIDADE 3

USO DO MATLAB

Obter no SIMULINK o gráfico da solução x(t) para cada uma dos problemas de valor inicial abaixo:

(a) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 8x = 40 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 8x = 40 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -10 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 8x = 16t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \ddot{x} + 6\dot{x} + 8x = 16t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + 1600x = 8000 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + 1600x = 3000t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + 1600x = 3000t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 150 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dddot{y} + 30\ddot{y} + 1825\dot{y} + 32500y = 32500 \\ y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0 \end{cases}$