MODELOS MATEMÁTICOS

(Cap.2 do Dorf & Bishop)

OBJETIVO Escrever as equações que relacionam entre si as variáveis de interesse

Sistemas mecânicos: relação entre forças (acelerações), torques, velocidades, deslocamentos, ...

Sistemas elétricos: relação entre correntes, tensões, cargas, campos, ...

Sistemas térmicos: relação entre temperaturas e fluxos de calor, ...

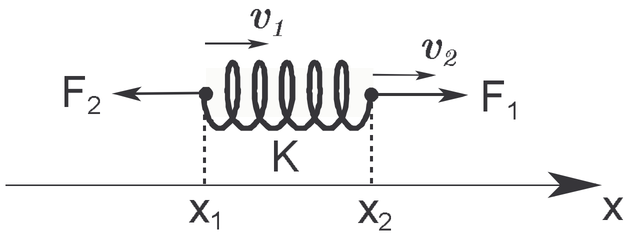
Sistemas hidráulicos: relação entre pressões, velocidades, fluxos de escoamento, ...

Sistemas com transporte de massa: relação entre concentrações, fluxos de massa, ...

Para todo tipo de sistema, pode-se definir a energia armazenada em cada modo (mecânico, elétrico, térmico, ...) e usar o princípio da conservação da energia para equacionar a troca de energia entre os vários modos.

OS COMPONENTES MECÂNICOS BÁSICOS

Mola de tração



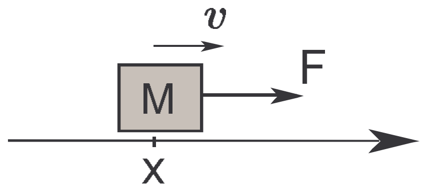
se a massa for desprezível,
teremos $F_1 = -F_2 = F$

se a mola estiver no regime elástico, $F = -K(x_1 - x_2 - L)$
(L é o comprimento de equilíbrio)

abreviadamente, $F = -K.(x_{12}-L) = K.(x_{21}+L)$ *(relação força-deslocamento)*

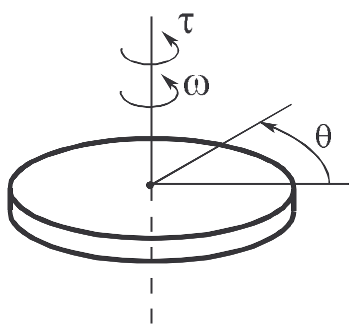
$$\frac{dF}{dt} = K v_{21}$$ *(relação força-velocidade)*

Massa: inércia de translação



$F = M.a \qquad F = M\frac{dv}{dt} \qquad F = M\frac{d^2x}{dt^2}$

Massa: inércia de rotação

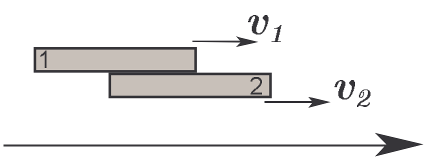


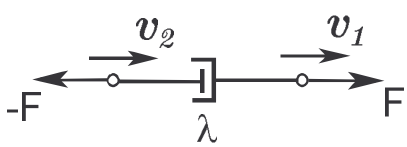
A aceleração angular é igual ao torque aplicado

$$\tau = J\frac{d\omega}{dt} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \tau = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

J = momento de inércia do tambor

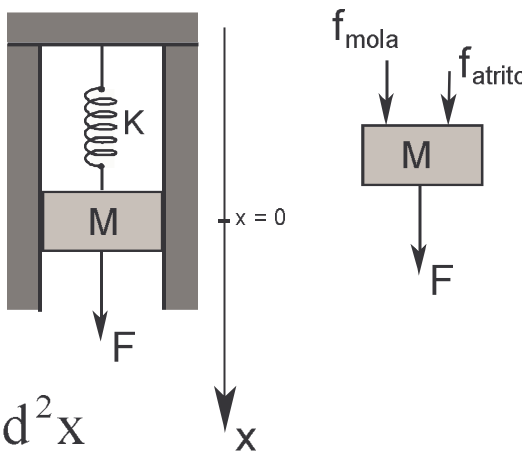
Atrito viscoso





F_{12} = força de atrito viscoso que 2 faz em 1
$F_{12} = -F_{21} = F$ (ação e reação)
Definição de atrito viscoso: $F = -\lambda(v_1 - v_2) = -\lambda.v_{12}$

O SISTEMA MASSA-MOLA COM AMORTECIMENTO



Supondo que o ponto de equilíbrio é x = 0, teremos

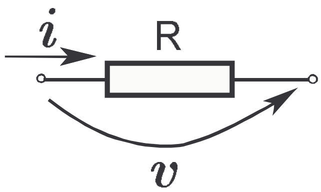
$f_{mola} = -Kx$ $\qquad$ $f_{atrito} = -\lambda \dfrac{dx}{dt}$

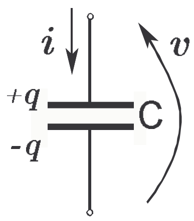
$$\sum F = m.a \quad \Rightarrow \quad F - \lambda \frac{dx}{dt} - Kx = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{M \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F}$$ relação entre deslocamento e força externa

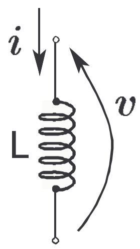
$$\boxed{M \frac{dv}{dt} + \lambda v + k \int v.dt = F}$$ relação entre velocidade e força externa

OS COMPONENTES ELÉTRICOS BÁSICOS





INDUTOR



RESISTOR

CAPACITOR

$\phi = -L.i$

(fluxo magnético)

$v = R.i$

(lei de Ohm)

$q = C.v$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v = -\frac{d\phi}{dt}$$ *(indução)*

$$v = L \frac{di}{dt}$$

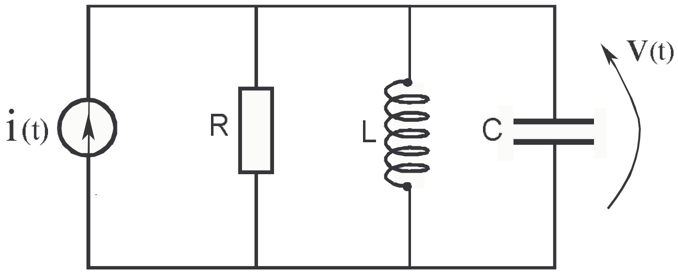
C = capacitância $\qquad$ L = indutância

[C] = F (Farad) no SI $\qquad$ [L] = H (Henry no SI)

O CIRCUITO RLC

$i = i_R + i_L + i_C$

$$i = \frac{v}{R} + i_L + C\frac{dv}{dt}$$



$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int v.dt = i$$

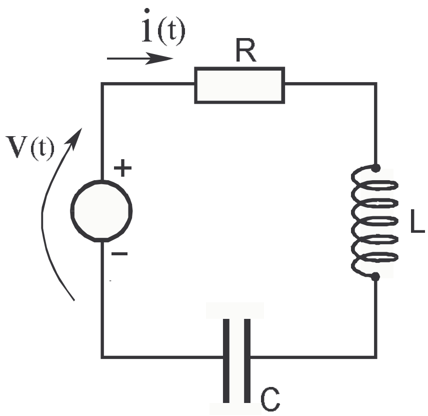
$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = \frac{di}{dt}$$

relação entre a tensão de saída e a corrente de entrada

NOTE A ANALOGIA MECÂNICO-ELÉTRICA

Força e corrente	$F \leftrightarrow i$
Velocidade e voltagem	$v \leftrightarrow V$
Massa e capacitância	$M \leftrightarrow C$
Atrito e resistência	$\lambda \leftrightarrow 1/R$
Força elástica e indutância	$K \leftrightarrow 1/L$

EXERCÍCIO 7: Considere o circuito RLC série ao lado como um sistema onde a entrada é a voltagem externa v(t) e a saída é a corrente i(t).

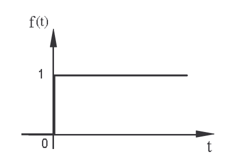
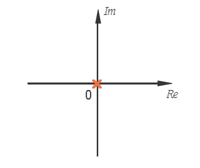
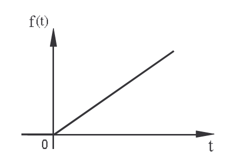
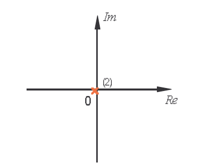
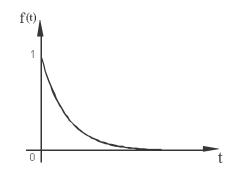
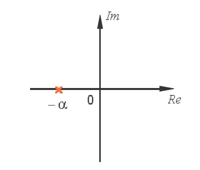
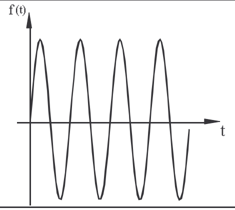
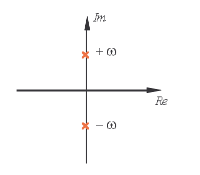


(a) Escreva a equação diferencial para i(t).
(b) Estabeleça a analogia eletro-mecânica nesse caso comparando com a equação diferencial para o sistema massa-mola.

USANDO A TRANSFORMADA DE LAPLACE

→ No domínio do tempo, analisamos o comportamento dos sistemas usando gráficos de funções *versus* tempo.

→ No domínio da freqüência, analisamos o comportamento dos sistemas verificando a posição dos pólos e zeros das transformadas de Laplace no plano complexo.

FUNÇÃO	**DOMÍNIO DO TEMPO**		**DOMÍNIO DA FREQÜÊNCIA**		**Fenômeno que descreve**
	equação	*representação gráfica*	*transformada de Laplace*	*diagrama de pólos e zeros*	
Degrau unitário	$f(t)=\begin{cases} t & \text{para } t>0 \\ 0 & \text{para } t<0 \end{cases}$		$F(s)=\dfrac{1}{s}$		Sinal constante aplicado em $t=0$
Varredura linear	$f(t)=\begin{cases} t & \text{para } t>0 \\ 0 & \text{para } t<0 \end{cases}$		$F(s)=\dfrac{1}{s^2}$		Aumento linear
Decaimento exponencial	$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{para } t>0 \\ 0 & \text{para } t<0 \end{cases}$		$F(s)=\dfrac{1}{s+\alpha}$		Relaxação constante de tempo $=1/\alpha$
Oscilação harmônica	$f(t)=\begin{cases} \operatorname{sen}(\omega t) & \text{para } t>0 \\ 0 & \text{para } t<0 \end{cases}$		$F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$		Oscilação harmônica freqüência f $(f=\omega/2\pi)$

RESUMO DAS TRANSFORMADAS BÁSICAS E DAS PROPRIEDADES

Transformadas	
f(t)	F(s)
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{s+\alpha}$
$\operatorname{sen}(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1

Propriedades	
f(t)	F(s)
$f(t)+g(t)$	$F(S)+G(S)$
$A.f(t)$	$A.F(S)$
$e^{-\alpha t}f(t)$	$F(s+\alpha)$
$t.f(t)$	$-\dfrac{dF}{ds}$
$t^n.f(t)$	$(-1)^n\dfrac{d^nF}{ds^n}$
$\dfrac{df}{dt}$	$sF(s)-f(0)$
$\dfrac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

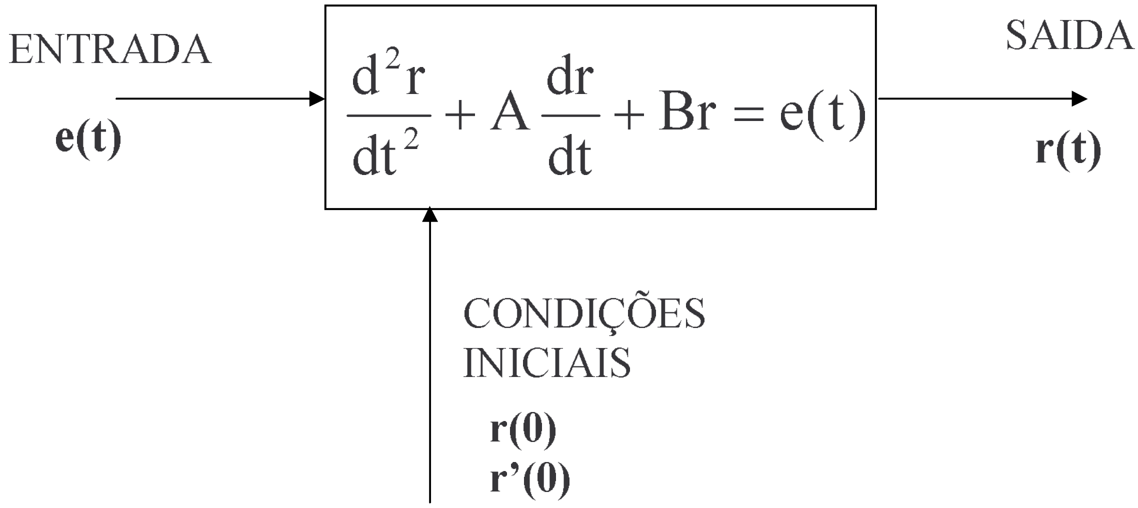
TEOREMA DO VALOR INICIAL

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

TEOREMA DO VALOR FINAL

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

No domínio do tempo:



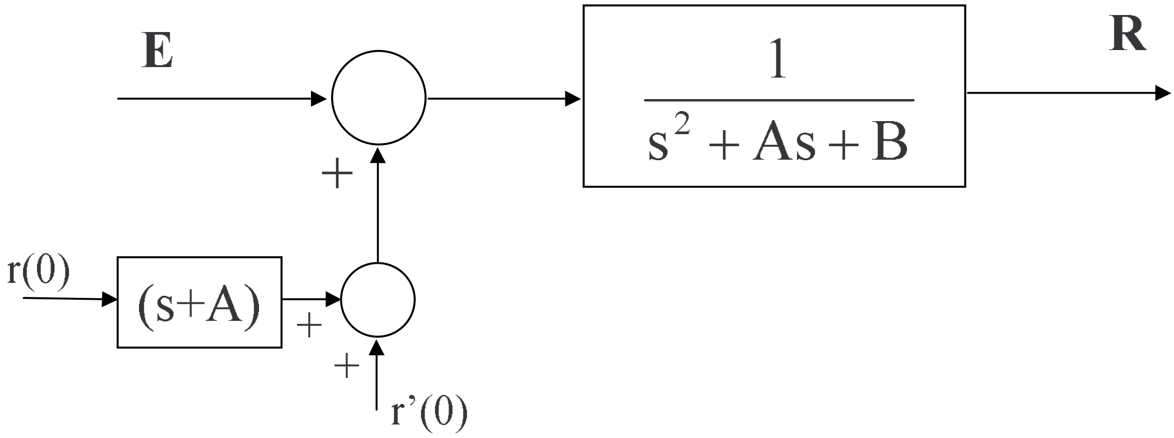
Usando a transformada de Laplace:

$s^2R - sr(0) - r'(0) + A[sR - r(0)] + BR = E$

$(s^2 + As + B)R - (s+A)r(0) - r'(0) = E$

$$R = \frac{E}{s^2 + As + B} + \frac{(s + A)r(0) + r'(0)}{s^2 + As + B}$$

No domínio da freqüência:



$s^2 + As + B$ é chamada de *equação característica* do sistema.

A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Se as condições iniciais são nulas, a relação saída-entrada é simplesmente

$$R(s) = G(s).E(s)$$

$$E(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow R(s)$$

G(s) é a função de transferência do sistema.

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL f´´ + af´ + bf = g

forma geral : $f'' + af' + bf = g(t)$, onde a e b são constantes

g(t) é uma função conhecida (chamada de "função forçante", porque, na prática, corresponde a uma excitação imposta externamente ao sistema em estudo).

(I) DEFINIÇÕES

– Uma função h(t) que satisfaz à equação diferencial é chamada de *solução particular* da e.d.

– O conjunto de todas as soluções da e.d. é chamado de *solução geral* da mesma.

– A e.d. $f'' + af' + bf = 0$ é chamada de *"homogênea associada"* à e.d. $f'' + af' + bf = g(t)$.

(II) TEOREMA: A solução geral da e.d. $f'' + af' + bf = g(t)$ é a soma de uma solução particular com a solução geral da sua homogênea associada: $f(t) = f_P(t) + f_H(t)$

<u>Exemplo</u>: A função $f_p(t) = 2t^2 - 2t + 1$ é uma solução particular da e.d. $f'' + 5f' + 6f = 12t^2 + 8t$.

A solução geral da homogênea associada $f'' + 5f' + 6f = 0$ é $f_h(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t}$

A solução geral da e.d. $f'' + 5f' + 6f = 12t^2 + 8t$ é $f(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t} + 2t^2 - 2t + 1$, onde A e B são constantes quaisquer.

A solução particular também é conhecida como *"resposta forçada"*, porque é a parte da solução causada pela função forçante g(t).

A solução da homogênea associada é conhecida como *"resposta natural"*, porque é a parte da solução que corresponde ao comportamento intrínseco do sistema descrito pela e.d..

Quando a solução da homogênea decai com o tempo, ela é chamada de *"solução transiente"*, e a solução particular de *"solução de regime"*.

(III) Solução geral da e.d. homogênea $f'' + af' + bf = 0$:

1. Encontre as raízes da equação característica $x^2 + ax + b = 0$;
2. Se as raízes forem α e β, distintas e reais, a solução geral pode ser escrita como $Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$
3. Se a raiz for dupla = α , a solução geral é $(A + Bt)e^{\alpha t}$
4. Se as raízes forem complexas conjugadas = $\alpha \pm j\beta$, a solução geral pode ser escrita como $Me^{\alpha t}\cos(\beta t + \phi)$ ou como $e^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\mathrm{sen}(\beta t)]$. A, B, M e ϕ são constantes arbitrárias.

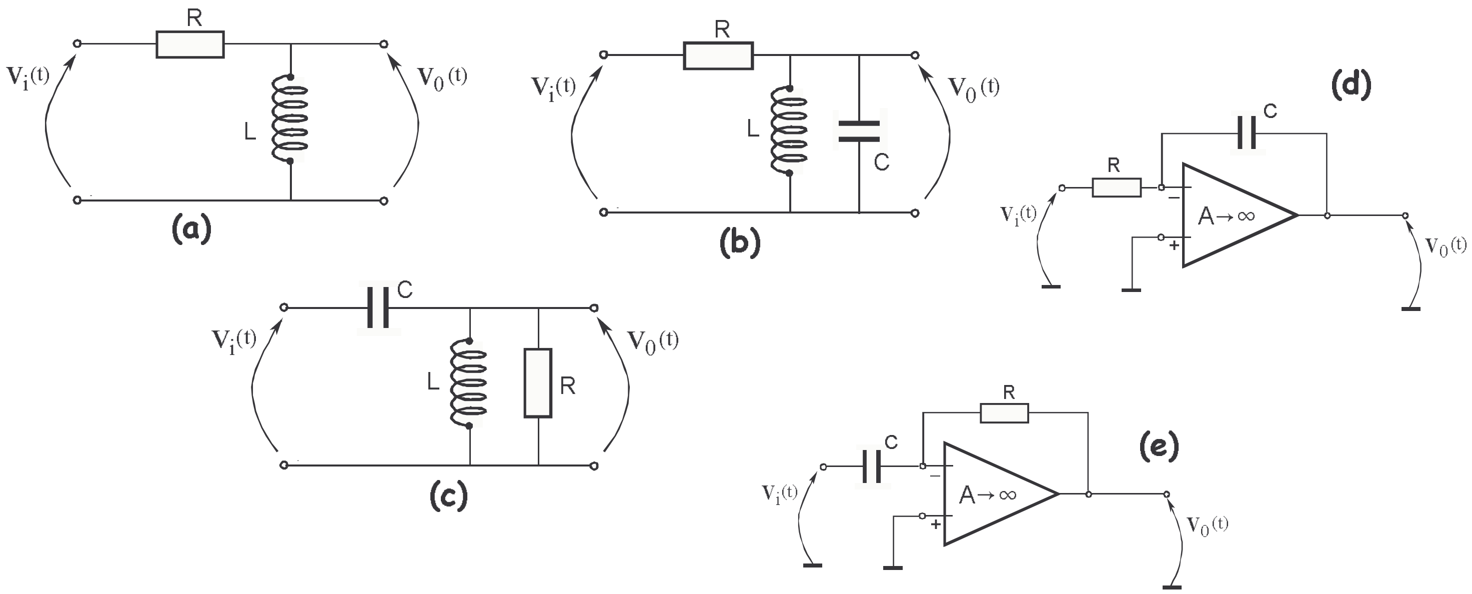
(IV) Solução particular

Não há uma técnica que funcione sempre para encontrar uma solução particular. Em alguns casos, a solução particular é óbvia. Na maioria dos casos de interesse prático, tenta-se uma combinação linear entre g(t) e suas derivadas.

Exemplo: Considere a e.d. $f'' + 5f' + 6f = 12t^2 + 8t$.

A função forçante g(t) e suas derivadas tem a forma geral $Pt^2 + Qt + R$. Substituindo essa função na e.d., encontramos $P = 2$, $Q = -2$ e $R = 1$. Logo, uma solução particular é $2t^2 - 2t + 1$.

EXERCÍCIO 8: Para cada circuito elétrico abaixo, obtenha a equação diferencial que relaciona a saída $V_0(t)$ (em aberto) com a entrada $V_i(t)$. Estabeleça também as condições iniciais necessárias. Suponha que, no instante inicial t = 0, não haja qualquer energia armazenada nos circuitos, e que os amplificadores operacionais são ideais.



Resp.: (a) $\begin{cases} \frac{dv_0}{dt} + \frac{R}{L}v_0 = \frac{dv_i}{dt} \\ v_0(0) = v_i(0) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{d^2v_0}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_0}{dt} + \frac{v_0}{LC} = \frac{1}{RC}\frac{dv_i}{dt} \\ v_0(0) = 0 \\ v_0'(0) = v_i(0)/RC \end{cases}$ (c) $\begin{cases} v_0'' + \frac{v_0'}{RC} + \frac{v_0}{LC} = v_i'' \\ v_0(0) = v_i(0) \\ v_0'(0) = v_i'(0) - v_i(0)/RC \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \frac{dv_0}{dt} = -v_i / RC \\ v_0(0) = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} v_0 = -RC\frac{dv_i}{dt} \\ v_0(0) = -RCv_i'(0) \end{cases}$

EXERCÍCIO 9: Suponha, no exercício anterior, que R = 4Ω, L = 2H e C = 0,5F. Encontre o sinal $v_0(t)$ quando a entrada for um degrau de amplitude 10. Se o sistema for amortecido, encontre a constante de tempo τ e, se a resposta for oscilatória, encontre freqüência de oscilação ω.

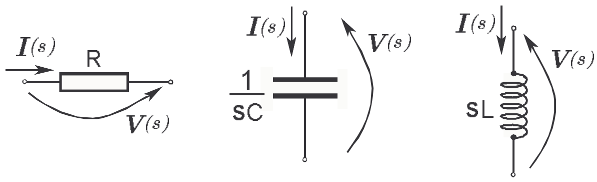
Resp.: (a) $v_0(t) = 10e^{-2t}$; *τ = 0,5* *(b)* $v_0(t) = 5{,}16e^{-0{,}25t}\,\mathrm{sen}(0{,}97t)$; *τ =4; ω = 0,97*

(c) $v_0(t) = 10{,}3e^{-0{,}25t}\cos(0{,}97t + 14^\circ)$; *τ =4; ω = 0,97* *(d)* $v_0(t) = -5t$ *(e)* $v_0(t) = 0$

EXERCÍCIO 10: Encontre a função de transferência de cada um dos circuitos do exercício 8 (suponha que as condições iniciais são nulas).

Resp.: (a) $G(s) = \dfrac{s}{s + R/L}$ *(b)* $G(s) = \dfrac{s/RC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$ *(c)* $G(s) = \dfrac{s}{s^2 + s/RC + 1/LC}$ *(d)* $G(s) = \dfrac{-1}{RCs}$ *(e)* $G(s) = -RCs$

EXERCÍCIO 11: Encontre a função de transferência de cada um dos circuitos do exercício 8, usando as transformadas de cada elemento e resolvendo os circuitos diretamente.



EXERCÍCIOS DO DORF & BISHOP:

E2.4 Uma impressora a laser utiliza um feixe de laser para imprimir cópias rapidamente para um computador. O laser é posicionado por um sinal de controle de entrada $r(t)$ de modo que se tenha

$$Y(s) = \frac{4(s + 50)}{s^2 + 30s + 200}R(s).$$

A entrada $r(t)$ representa a posição desejada do feixe de laser.
(a) Se $r(t)$ é uma entrada degrau unitário, determine a saída $y(t)$.
(b) Qual é o valor final de $y(t)$?

Resposta: (a) $y(t) = 1 + 0{,}6e^{-20t} - 1{,}6e^{-10t}$, (b) $y_{ss} = 1$

E2.21 A velocidade angular ω do satélite mostrado na Figura E2.21 é ajustada mudando-se o comprimento da barra L. A função de transferência entre $\omega(s)$ e a variação incremental do comprimento da barra $\Delta L(s)$ é

$$\frac{\omega(s)}{\Delta L(s)} = \frac{2{,}5(s + 2)}{(s + 5)(s + 1)^2}.$$

A variação de comprimento da barra é $\Delta L(s) = 1/(4s)$. Determine a resposta de velocidade $\omega(t)$.

Resposta: $\omega(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{128}e^{-5t} - \frac{35}{128}e^{-t} - \frac{5}{32}te^{-t}$

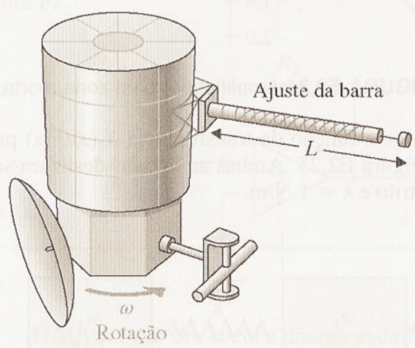


FIGURA E2.21 Satélite com velocidade angular ajustável.

E2.25 Determine a função de transferência $X_2(s)/F(s)$ para o sistema mostrado na Figura E2.25. Ambas as massas deslizam sobre uma superfície sem atrito e $k = 1$ N/m.

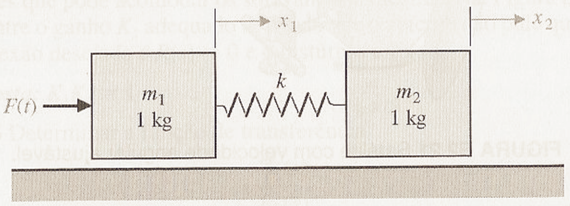


FIGURA E2.25 Duas massas conectadas em uma superfície sem atrito.

Resposta: $\dfrac{X_2(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{s^2(s^2 + 2)}$