MATEMÁTICA II - Engenharias/Itatiba

1º Semestre de 2009

Prof. Maurício Fabbri

3ª Série de Exercícios

MATRIZES

Uma matriz de dimensões $m \times n$ é um conjunto ordenado de mn elementos, dispostos em uma grade retangular de m linhas e n colunas.

NOTAÇÃO: a_{ij} é o elemento da matriz **A** que está na linha i e na coluna j

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uma matriz numérica é aquela cujos elementos são números. Em problemas de computação ou de álgebra simbólica, ou na organização de planilhas, matrizes não-numéricas são utilizadas para armazenar qualquer tipo de informação. Trataremos neste curso apenas de matrizes numéricas.

- Se $m = n$, a matriz é quadrada. n é a ordem, ou a dimensão, da matriz.
- Uma matriz de uma só linha, isto é, de dimensões $1 \times n$, é uma matriz linha.
- Uma matriz de uma só coluna (dimensões $m \times 1$) é uma matriz coluna.

- A transposta de uma matriz $m \times n$ **A** é a matrix $n \times m$ $\mathbf{A}^t$ tal que $(a^t)_{ji} = a_{ij}$, para $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

- Uma matriz quadrada **A** $n \times n$ é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, para $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le n$, isto é, $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$
- Uma matriz quadrada **A** $n \times n$ é anti-simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$, para $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le n$, isto é, $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$

Exercício 1: (a) Escreva a matriz quadrada **A** de ordem 4 tal que $a_{ij} = i+j$. Escreva também a matriz $\mathbf{A}^t$.

(b) Escreva a matriz quadrada **B** de ordem 4 tal que $b_{ij} = i-j$. Escreva também a matriz $\mathbf{B}^t$.

(c) Calcule as somas $S_j = \sum_{i=1}^{4} a_{ij}$, para j = 1, 2, 3 e 4

(d) Calcule as somas $C_i = \sum_{j=1}^{4} b_{ij}$, para i = 1, 2, 3 e 4

(e) Calcule a soma $P_{23} = \sum_{k=1}^{4} a_{2k} b_{k3}$

Exercício 2: Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, (a) calcule $S = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} b_{1i}$ (b) Escreva as matrizes $\mathbf{A}^t$ e $\mathbf{B}^t$

IGUALDADE

Duas matrizes são iguais se e só se elas tem as mesmas dimensões e os mesmos elementos nas mesmas posições.

MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Se **C** é uma matriz $m \times n$ e λ um número (escalar), então

$$\mathbf{B} = \lambda \mathbf{C} \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = \lambda a_{ij} \ , \ 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Sendo **A** e **B** matrizes $m \times n$,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ , \ 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \ , \ 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n$$

Exercício 3: Sendo A e B as matrizes definidas no exercício 1, encontre as matrizes **C** = **A** + **B** , **D** = **A** - **B** e **E** = 2**A** – 3**B** .

Exercício 4: Encontre x e y tais que:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2y \end{pmatrix}$ (c) $x\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$

ALGUMA MATRIZES ESPECIAIS

Uma matriz quadrada **A** é diagonal quando $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$

A matriz identidade de ordem n , denotada por $\mathbf{I}_n$, é uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal são iguais a 1.

Exercício 5: Sendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, encontre a matriz **X** tal que:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{X} = 2\mathbf{I}_3$ (b) $\mathbf{A} - \mathbf{X} = 2\mathbf{I}_3$

Exercício 6: *(uma matriz tridiagonal)* Escreva a matriz B, 5×5 , tal que $b_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad i = j \\ -1 & \text{se} \quad |i - j| = 1 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \text{ ou } |i - j| \neq 1 \end{cases}$

Exercício 7: *(matriz de permutação)* Dada uma seqüência de N objetos em uma dada ordem, uma permutação dessa seqüência é obtida escrevendo esses mesmos objetos em uma outra ordem. Por exemplo:

As permutações possíveis da seqüência {vermelho, verde, azul, preto} são:

P_0 = {vermelho, verde, azul, preto}
P_1 = {vermelho, verde, preto, azul}
P_2 = {vermelho, azul, verde, preto}
P_3 = {vermelho, azul, preto, verde} .... etc

É fácil mostrar que o número de permutações possíveis entre N objetos é $N! = N(N-1)(N-2)...1$
(existem exatamente 24 permutações entre os 4 objetos acima, verifique !)

Cada permutação de N objetos pode ser representada por uma matriz, da seguinte maneira:

- Tome N objetos e N posições. Numere os objetos de 1 a N; isto vai definir uma seqüência inicial de objetos ocupando cada um uma das N posições;

- uma permutação desses objetos é uma configuração desses N objetos ocupando, cada um, um dos N lugares possíveis. Cada uma das configurações possíveis pode ser representada por uma matriz P, $N \times N$, onde $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o objeto i ocupa o lugar j} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ *(note que as linhas correspondem aos objetos, e as colunas correspondem às posições)*

Por exemplo, seja {vermelho, verde, azul, preto} a seqüência inicial.

Então a permutação {vermelho, verde, preto, azul} será representada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

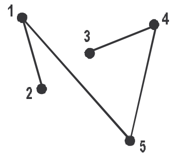
Note que uma matriz de permutação terá exatamente um elemento ´1´ em cada coluna ou linha.

(a) escreva a matriz permutação correspondente a
{vermelho, verde, azul, preto} $\rightarrow$ {vermelho, preto, azul, verde}

(b) escreva a matriz permutação correspondente a
{vermelho, verde, azul, preto} $\rightarrow$ {vermelho, verde, azul, preto}

(c) escreva a matriz permutação correspondente a {✂👓☎☺💣} $\rightarrow$ {💣☎✂☺👓}

Exercício 8: *(matrizes de grafos)* Um grafo é um arranjo de pontos conectados entre sí por segmentos. Essas conexões podem ser representadas por uma matriz **G** (chamada de matriz de incidência), de modo que $g_{ij} = 1$ se os pontos i e j estão conectados; caso contrário $g_{ij} = 0$. A convenção mais comum é de que o ponto i não esteja conectado consigo mesmo, ou seja, $g_{ii} = 0$.

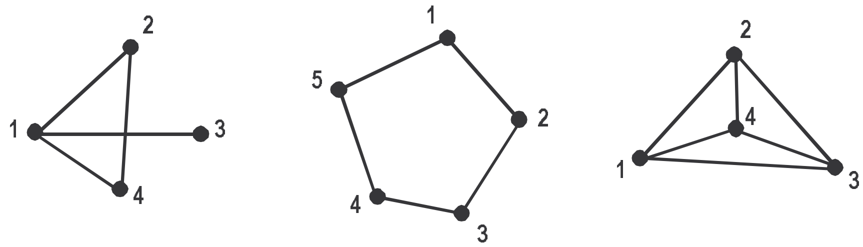
Por exemplo, para o grafo 

teremos $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) O que significam as somas dos elementos de cada linha de **G** , $L_i = \sum_{j=1}^{N} g_{ij}$?

(b) O que significam as somas dos elementos de cada coluna de **G** , $C_j = \sum_{i=1}^{N} g_{ij}$?

(c) Escreva as matrizes de incidência dos seguintes grafos:



MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Se o número de colunas da matriz **A** é igual ao número de linhas da matriz **B**, isto é:

A é uma matriz $m \times n$
B é uma matriz $n \times p$

definimos o produto de **AB** como sendo a matriz **C** , $m \times p$, tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Ou seja, o elemento c_{ij} de **C** é obtido multiplicando os termos da linha i de **A** com os termos correspondentes da coluna j de **B**.

Por exemplo, se $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, com $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, então o elemento c_{12} será:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad c_{12} = (1)(-1) + (-2)(0) + (5)(-2) = -1 + 0 - 10 = -11$$

O resultado final será $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3-8+10 & -1+0-10 \\ 0+12+4 & 0+0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$

PROPRIEDADES DO PRODUTO

1. O produto de matrizes não é comutativo, isto é, em geral, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

2. Dizemos que as matrizes **A** e **B** comutam quando **AB** = **BA** *(este é um caso bastante especial)*

3. O produto é associativo, isto é, (**AB**)**C** = **A**(**BC**) (respeitando a ordem)

4. O produto é distributivo, isto é, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

5. $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$ (note a ordem dos fatores!)

6. A matriz identidade $\mathbf{I}$ de ordem n é tal que $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$, para qualquer matriz $\mathbf{A}$ $m \times n$, e $\mathbf{IB} = \mathbf{B}$ para qualquer matriz $\mathbf{B}$ $n \times p$. Se $\mathbf{C}$ é uma matriz quadrada de ordem n , então $\mathbf{CI} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}$.

<u>**Exercício 9:**</u> Sendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ encontre as matrizes $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$

<u>**Exercício 10:**</u> Encontre as matrizes $\mathbf{A}^2$ e $\mathbf{A}^3$, sendo $\mathbf{A}$ a matriz definida no exercício 9.

<u>**Exercício 11:**</u> Encontre a matriz $\mathbf{AA}^t$, onde $\mathbf{A}$ é a matriz definida no exercício 9.

<u>**Exercício 12:**</u> Um vetor no espaço cartesiano tem três coordenadas, e pode ser representado por uma matriz linha, por exemplo, $\mathbf{V} = (1, -2, 3)$. O produto escalar entre dois vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é definido como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{AB}^t$, e a norma de um vetor $\mathbf{V}$ é $\| \mathbf{V} \| = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$. O ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é $\cos^{-1} \dfrac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\sqrt{\| \mathbf{A} \| \times \| \mathbf{B} \|}}$.

Dados os vetores $\mathbf{A} = (1, 0, -3)$ e $\mathbf{B} = (-1, 2, 3)$ encontre $\|\mathbf{A}\|$, $\|\mathbf{B}\|$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e o ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

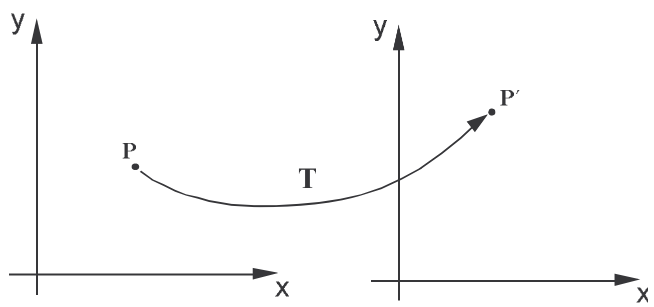
<u>**Exercício 13:**</u> Encontre x e y de modo que $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, onde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>**Exercício 14:**</u> (a) Encontre duas matrizes quadradas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de ordem 2 tais que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, mas nenhuma delas é a matriz $\mathbf{0}$ (a matriz $\mathbf{0}$ tem todos os elementos iguais a zero).

(b) Se $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, podemos afirmar que as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são iguais? Exemplifique.

<u>**Exercício 15**</u> Encontre a matriz $\mathbf{X}$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

<u>**Exercício 16**</u> Definindo um sistema de eixos cartesianos x e y no plano, cada ponto P do plano pode ser representado por uma matriz coluna $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, contendo as coordenadas desse ponto (essa matriz é o vetor de coordenadas do ponto). Se multiplicarmos esse vetor por uma matriz numérica quadrada $\mathbf{T}$, 2×2 , obtemos as coordenadas de um novo ponto P′ ($\mathbf{P'} = \mathbf{TP}$). A matriz $\mathbf{T}$ define uma *transformação linear* no plano, ou *mapeamento linear*; a idéia é que cada ponto P é mapeado para o ponto P′ pela transformação $\mathbf{T}$. O ponto P′ é chamado de imagem de P gerada pela transformação $\mathbf{T}$.

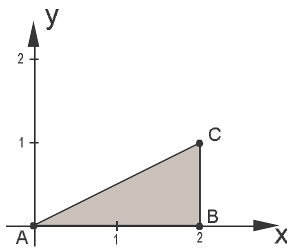


(a) Encontre as imagens dos pontos $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ geradas pela transformação $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) *(dilatação)* Qual o efeito da mapeamento $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ quando aplicado aos pontos de uma figura no plano?

(c) *(reflexão)* Qual o efeito de $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(d) *(rotação de 90°)* Aplique a transformação $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aos vértices do triângulo ABC da figura ao lado. O que esse mapeamento faz?



(e) Mostre que duas transformações lineares **T** e **V**, aplicadas sucessivamente e nessa ordem (primeiro **T** e depois **V**), é equivalente a uma única transformação linear **P**, que pode ser encontrada fazendo o produto **VT**, isto é, **P** = **VT**.

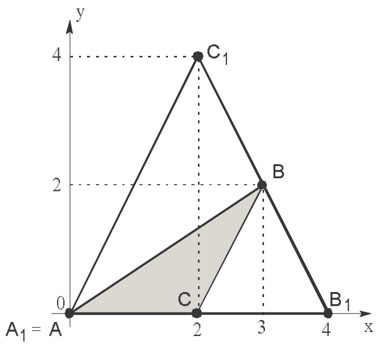
(f) Dê um exemplo de duas transformações lineares que comutam, isto é, **VT** = **TV**

(g) Dê um exemplo de duas transformações lineares que não comutam, isto é, **VT** ≠ **TV**

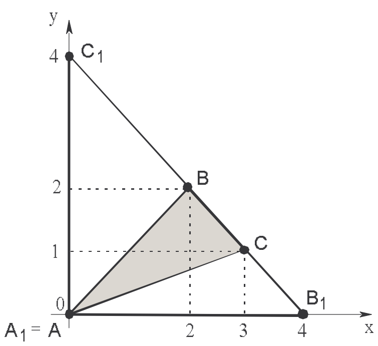
(h) Uma transformação linear é <u>própria</u> se o determinante de T não é nulo. Mostre que uma reta, quando mapeada por uma transformação linear própria, resulta em outra reta.

(i) Encontre a transformação linear que mapeia o triângulo ABC no triângulo $A_1B_1C_1$, em cada um dos seguintes casos:

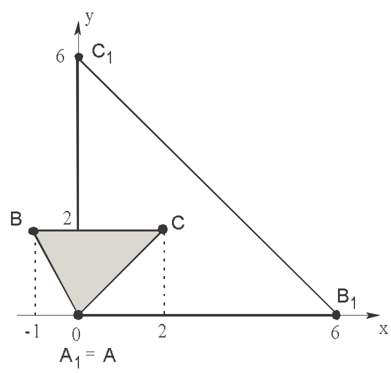
(1)



(2)



(3)



(j) Encontre a transformação linear no plano que corresponde a uma rotação de um ângulo θ, no sentido anti-horário, ao redor da origem.

REFERENCIAS

1. Fuller, L.E.; *Basic Matrix Theory*. Prentice_hall, 1962.
2. Mumford, D., Series, C. and Wright, D.; *Indra's Pearls – The vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, 2002.

RESPOSTAS

Exercício 1: (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^t = -\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $S_1 = 14$ $S_2 = 18$ $S_3 = 22$ $S_4 = 26$
(d) $C_1 = -6$ $C_2 = -2$ $C_3 = 2$ $C_4 = 6$
(e) $P_{23} = -4$

Exercício 2: (a) $S = 4$ (b) $\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}^t = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercício 3: $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 14 & 19 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 1 & 6 & 11 & 16 \end{pmatrix}$

Exercício 4: (a) $\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$

Exercício 5: (a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 6: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 7: (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_4$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 8: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 9: $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercício 10: $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Exercício 11**: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 12: $\|\mathbf{A}\| = 10$ $\|\mathbf{B}\| = 14$ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -10$ $147^{\circ}41'18''$ **Exercício 13**: $x = 1$ e $y = -2$

Exercício 14: (a) por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) basta que $\mathbf{A(B\text{-}C) = 0}$. Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

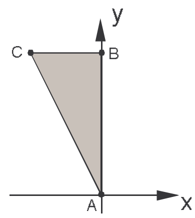
Exercício 15: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 16: (a) $p_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $p_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $p_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $p_4' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) o efeito é dobrar as coordenadas de todos os pontos da figura, resultando numa figura duas vezes maior

(c) refletir um ponto em torno do eixo y (como se o eixo y fosse um espelho)

(d) $(0,0) \rightarrow (0,0)$; $(2,0) \rightarrow (0,2)$ e $(2,1) \rightarrow (-1,2)$
o efeito é girar o triângulo no sentido anti-horário de 90° em relação à origem :



(f) uma dilatação (por exemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$) e uma reflexão (por exemplo, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

(g) uma reflexão (por exemplo, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) e uma rotação (por exemplo, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

(h) Lembremos que os pontos (x,y) estão todos sobre uma reta se Ax + By = C , onde A, B e C são constantes e A e B não são simultaneamente nulos.

A transformação linear $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, aplicada a um ponto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ do plano, resulta no ponto $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix}$. Portanto $\begin{cases} px + qy = x' \\ rx + sy = y' \end{cases}$. Multiplicando a primeira equação por (-r), a segunda por (p) e somando, obtemos (ps-rq)y = py′-rx′ . Multiplicando a primeira por (-s), a segunda por (q) e somando, obtemos (rq-ps)x = qy′-sx′. Defina λ = (ps-rq) , o determinante de T. Note que devemos ter $\lambda \neq 0$ para que T represente um mapeamento aceitável de (x,y) para (x′,y′). Chegamos então às equações $\begin{cases} py' - rx' = \lambda y & (1) \\ qy' - sx' = -\lambda x & (2) \end{cases}$. Agora suponha que (x,y) esteja sobre uma reta, ou seja, que Ax + By = C. Multiplique a equação (1) por (B), a equação (2) por (-A), e some as duas. Obtemos uma relação da forma Mx′+Ny′=P, com M, N e P constantes. Portanto, os pontos (x′, y′) também estarão sobre uma reta. Confira que, sendo $\lambda \neq 0$, as constantes M e N não serão simultaneamente nulas.

(i) *(1)* $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ *(2)* $\begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 \\ 7/6 & 1/2 \end{pmatrix}$ *(3)* $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(j) Há uma técnica eficiente para se encontrar a matriz de uma transformação linear desejada.

Basta notar que um ponto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qualquer do plano pode ser escrito como $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tratando x e y como escalares. Se a matriz de uma transformação **T** é $\begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix}$, então o resultado dessa transformação sobre o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é o vetor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = primeira coluna de **T**. E o resultado de $\mathbf{T}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é o vetor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ = segunda coluna de **T**. Portanto, basta encontrar o resultado do mapeamento **T** sobre os vetores-base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

O resultado de uma rotação anti-horária de um ângulo θ ao redor da origem, sobre o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, é o vetor $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$, e sobre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, resulta $\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. Portanto $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Note que o determinante de **T** é igual a 1.